

# 辨识非线性曲线的非线性极大似然—优化法

邓建华

(西北工业大学飞机系,西安)

**摘要:** 工程上经常碰到非线性曲线辨识问题. 本文探讨一种非线性极大似然—优化法并结合三次样条函数拟配法, 形成统一的逐次逼近的直接辨识非线性曲线的非线性辨识方法. 该法兼有极大似然法的唯一性、很好的收敛性和优化法直接处理非线性系统的能力, 辨识出的样条函数曲线能无限地光滑地逼近非线性曲线.

**关键词:** 非线性曲线辨识; 极大似然法; 优化法; 样条函数; 飞行器极曲线

## 1 前言

工程上经常碰到由已知测量数据确定一条非线性曲线问题, 例如飞行器飞行试验数据分析中由实测数据确定飞行性能的基本气动特性曲线——飞行器极曲线是不可少的. 这类曲线通常是严重非线性的, 难以用解析表达式表示的. 我们把由已知测量数据确定这类非线性曲线归结为非线性曲线辨识问题.

非线性曲线辨识方法尚属少见. 本文探讨一种用适当的函数系统(如三次样条函数曲线)逼近非线性曲线把非线性曲线辨识转化为一般参数辨识, 再与非线性极大似然—优化法结合形成统一的逐次逼近的直接辨识非线性曲线的非线性辨识方法. 该法兼有极大似然法的唯一性、很好的收敛性和优化法直接处理非线性系统的能力, 辨识出的函数曲线(如三次样条函数曲线)能无限地光滑地逼近非线性曲线.

文中将介绍方法的基本原理, 并以飞行器极曲线辨识为算例研究其具体应用.

## 2 基本原理

### 2.1 含有未知非线性曲线的非线性动态系统

设含有未知非线性曲线的非线性动态系统

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), \beta, \gamma(\delta)], \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$y(t) = g[x(t), u(t), \beta, \gamma(\delta)]. \quad (2)$$

其中,  $f[\ ]$  和  $g[\ ]$  为二个非线性函数;  $x, u$  分别为状态向量和控制向量;  $t$  为时间,  $\dot{x}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t}$ ;  $\beta$  为方程未知参数向量;  $\delta, \gamma$  分别为未知非线性曲线的自变量和因变量, 他们可表示成如下的函数关系

$$\gamma = s(\delta). \quad (3)$$

式中,  $s(\ )$  为非线性函数; 而  $y$  为观测向量(模型响应). 在  $N$  个离散时间点  $t_k (k=1, 2, \dots, N)$  测量的观测向量

$$z(t_k) = y(t_k) + v(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$



若将未知节点因变量  $y_j$  与方程未知参数向量  $\beta$  和未知初始向量  $x_0$  等组成新的或增广的未知参数向量

$$\theta = [\beta^T; \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n; x_0^T]^T \tag{10}$$

则可将方程(1)和(2)转化为仅含有未知参数的非线性动态系统

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), \theta], \tag{11}$$

$$y(t) = g[x(t), u(t), \theta]. \tag{12}$$

对于这种动态系统未知参数  $\theta$  可应用非线性参数辨识方法进行辨识。

### 2.3 非线性极大似然—直接优化法

非线性动态系统(11)和(12)的未知参数的极大似然估计是这样确定的,即使似然函数

$$L = L[z(t_1), z(t_2), \dots, z(t_N) | \theta] \tag{13}$$

极大.

如果得到  $N$  组独立测量向量值  $z(t_k)$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ), 则根据前面假设(5), 可将似然函数(13)极大转化为使负对数的似然函数

$$J = -\ln L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [z(t_k) - y(t_k)]^T R^{-1} [z(t_k) - y(t_k)] + \frac{1}{2} N \ln |R| + \frac{1}{2} N M \ln(2\pi) \tag{14}$$

极小. 如果测量误差协方差阵  $R$  是未知的, 可通过使目标函数  $J$  关于  $R^{-1}$  各元素极小来求得<sup>[2]</sup>

$$R = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [z(t_k) - y(t_k)][z(t_k) - y(t_k)]^T. \tag{15}$$

这样, 参数辨识的主要问题可归结为通过适当方法找一组参数  $\theta$  使目标函数(14)极小. 对于非线性动态系统(11)、(12)通常有两种方法: 拟线性化法<sup>[2]</sup>和直接优化法. 由于前者精度低、计算复杂, 这里采用后者. 所谓直接优化法, 即通过优化算法(例如 EXTREM 法<sup>[3]</sup>)

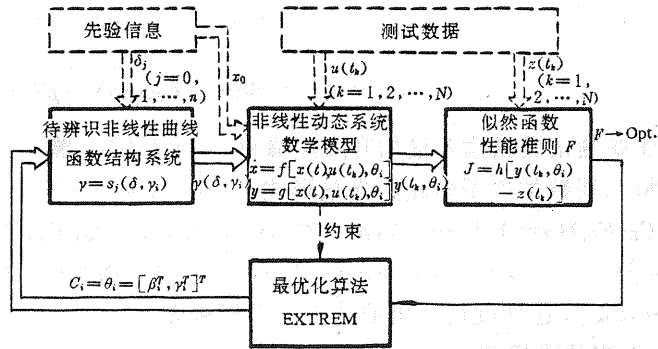


图 1 辨识非线性极大似然—直接优化法原理结构图

探寻一组最优参数  $\theta$ , 使目标函数  $J$ (14)极小. 其原理如图 1 所示.

上述所描述的即为辨识非线性曲线的非线性极大似然—优化法原理.

## 3 算 例

这里, 以在飞行试验数据分析中辨识飞行器极曲线为例, 研究上述方法的具体应用和特性.

### 3.1 飞行器数学模型

辨识飞行器极曲线可选用纵向运动方程做为飞行器非线性动态系统方程<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -q & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} \cos\alpha_T \\ -\sin\alpha_T \\ z_T \\ 0 \end{bmatrix} T \\ &+ \begin{bmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_D/m \\ C_L/m \\ C_m\bar{C}/I_y \end{bmatrix} \frac{1}{2}\rho V^2 S. \end{aligned} \quad (16)$$

式中,  $u, w, q, \theta, \alpha$  为飞行状态量;  $T, z_T, \alpha_T, m, I_y, S, \bar{C}, g, \rho$  为已知推力、质量、几何及大气数据<sup>[4]</sup>; 而  $C_D, C_L, C_m$  为未知空气动力系数, 可由下式表示:

$$\begin{aligned} C_D &= s(C_L), \\ C_L &= C_{L0} + C_{La}\alpha + C_{La^2}\alpha^2 + C_{L\delta_e}\delta_e, \\ C_m &= C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\alpha^2}\alpha^2 + C_{m\bar{\alpha}}\bar{\alpha} + C_{mq}\bar{q} + C_{m\delta_e}\delta_e. \end{aligned} \quad (17)$$

其中, 第一式为待求的飞行器极曲线, 是一条严重非线性曲线, 可用三次样条函数(6)逼近, 即

$$C_D = s_j(C_L, C_{Dj}), \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

式中,  $C_{Dj}$  为待求曲线节点因变量, 而节点自变量  $C_{Lj}$  是选定的; 第二、三式中  $C_{L0}, C_{La}, \dots, C_{m\delta_e}$  为未知待求的空气动力系数和导数.

在辨识飞行器极曲线的飞行试验中需测量的状态量有飞行速度  $V_m = \sqrt{u^2 + w^2}$ , 迎角  $\alpha_m = \tan^{-1}(\frac{w}{u})$ , 俯仰角  $\theta_m$ , 俯仰角速率  $q_m$  和  $x$ -与  $z$ -方向过载

$$\begin{aligned} n_{zm} &= (-C_D \cos\alpha + C_L \sin\alpha) \frac{1}{2}\rho V^2 S / mg, \\ n_{zm} &= (-C_D \sin\alpha - C_L \cos\alpha) \frac{1}{2}\rho V^2 S / mg. \end{aligned} \quad (19)$$

此外还要测量操纵输入量如升降舵偏角  $\delta_{em}$  和推力  $T_m$  等.

将上述数学模型转化为向量形式:  $x = [u, w, q, \theta]^T$ ,  $u = [T_m, \delta_{em}]^T$ ,  $y = C_D$ ,  $\delta = C_L$ ,  $C_D = s_j(C_L, C_{Dj}) (j=0, 1, \dots, n)$ ,  $\beta = [C_{L0}, C_{La}, C_{La^2}, C_{L\delta_e}; C_{m0}, C_{m\alpha}, C_{m\alpha^2}, C_{m\bar{\alpha}}, C_{mq}, C_{m\delta_e}]^T$ ,  $y = [V, \alpha, \theta, q, n_x, n_z]^T$ ,  $z = [V_m, \alpha_m, \theta_m, q_m, n_{zm}, n_{zm}]^T$ ,  $\theta = [C_{L0}, C_{La}, C_{La^2}, C_{L\delta_e}; C_{m0}, C_{m\alpha}, C_{m\alpha^2}, C_{m\bar{\alpha}}, C_{mq}, C_{m\delta_e}; C_{D0}, C_{D1}, \dots, C_{Dn}]^T$ . 这样就可应用前述方法进行辨识了.

### 3.2 数字仿真研究

所谓数字仿真研究, 即由飞行器仿真模型的输入输出数据代替实测试飞数据进行非线性曲线辨识.

这里选用考虑大气紊流影响的纵向非线性运动方程做为飞行器仿真模型<sup>[5,6]</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [-D + T\cos(\alpha + \alpha_T)]/m - g\sin(\theta - \alpha) + a_{wv} + b_{wv}, \\ \dot{\alpha} &= [-L - T\sin(\alpha + \alpha_T)]/mV + g\cos(\theta - \alpha)/V + q + a_{wa} + b_{wa}, \\ \dot{\theta} &= q, \\ \dot{q} &= (M + T \cdot z_T)/I_y, \\ n_z &= (-D\cos\alpha + L\sin\alpha)/mg, \end{aligned}$$

$$n_z = (-D \sin \alpha - L \cos \alpha) / mg. \quad (20)$$

式中,  $D = \frac{1}{2} \rho V^2 S \cdot C_D(\delta_e)$ ,  $L = \frac{1}{2} \rho V^2 S \cdot C_L(\delta_e)$ ,  $M = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \cdot C_m(\delta_e)$  分别表示空气动力和力矩;  $a_{uv}$ ,  $b_{uv}$ ,  $a_{wa}$ ,  $b_{wa}$  为大气紊流干扰项; 其他符号意义同前.

这样, 只要系统加入适当形式的输入信号  $u(t) = [\delta_e, T]^T$  就可计算出其输出向量  $z(t_k) = [V, \alpha, \theta, q, n_x, n_z]^T$  数据.

根据国产某小型运输飞机的仿真数据辨识的飞机极曲线如图 2 所示, 其中极曲线分成不等的 10 段和 11 个节点(如表 1). 由图可见, 辨识出的三次样条函数极曲线非常逼近已给的精确的仿真极曲线. 在小升力系数  $C_L$  范围二者几乎重合, 只是大升力系数  $C_L$  时二者才略有差别, 但是误差很小. 表 1 给出了辨识出的极曲线节点值与已给的精确仿真值的比较. 从表中可看出, 辨识出的节点值与已给仿真值几乎完全一致, 只是在大大升力系数出现误差, 但最大误差也仅 2.18%, 是工程上所允许的. 辨识出的三次样条函数极曲线光滑而无振荡.

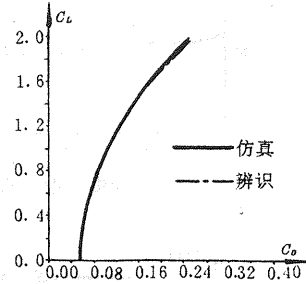


图 2 由仿真数据辨识的某小型运输机的极曲线

表 1 飞机极曲线节点值

$C_L$ (选定)	仿真值 $C_D$	辨识值 $C_D$	相对误差(%)
0.0	0.0565	0.05603	0.83
0.2	0.0585	0.05806	0.75
0.4	0.0643	0.0651	1.20
0.6	0.0741	0.0742	0.13
0.8	0.0878	0.0874	0.46
1.0	0.1055	0.1050	0.47
1.2	0.1271	0.1269	0.16
1.4	0.1525	0.1531	0.39
1.6	0.1819	0.1830	0.60
1.8	0.2153	0.2180	1.25
2.0	0.2525	0.2580	2.18

仿真计算结果还证实, 这种方法具有很好的收敛性和结果的唯一性, 计算时间也是工程上允许的.

### 3.3 由实测试飞数据辨识飞机极曲线

这里仍选用某小型运输飞机实测的飞行试验数据来辨识该机的极曲线.

应用上述方法由实测试飞数据辨识的飞机极曲线如图 3 所示. 辨识出极曲线光滑而略有振荡, 后者主要是由于个别节点测量所造成的. 为此将辨识的曲线经过最小二乘平滑处理, 得到一条平滑而无振荡极曲线.

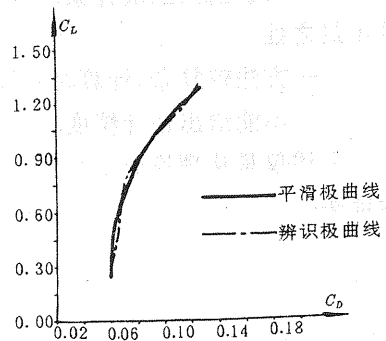


图 3 由实测试飞数据辨识的某小型运输机的极曲线

为验证辨识结果的精确性, 这里采用由辨识的极曲线预测各个观测量看其是否与实

测试飞测量值拟合. 计算结果表明(见图4), 预测各个飞行状态量时间历程曲线与实测的时间历程曲线拟合相当好, 这间接证实应用所述方法辨识的极曲线是精确的.

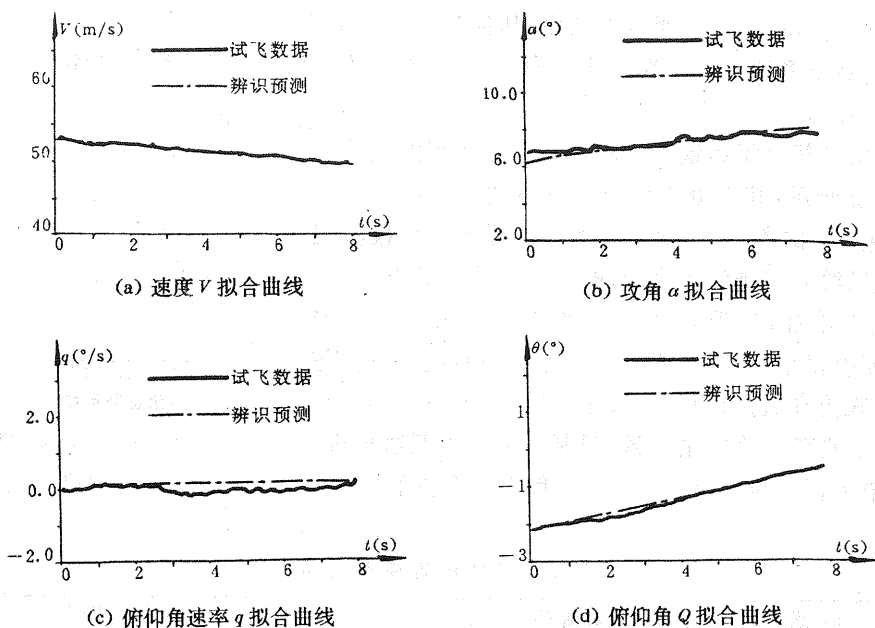


图4 由辨识极曲线预测飞行状态量与实测飞行状态量时间历程比较

## 4 结 语

通过理论分析和算例计算证实, 本文所研究的非线性极大似然—直接优化法并结合三次样条函数拟配法直接辨识非线性曲线是成功的. 它兼有极大似然法, 直接优化法和三次样条函数拟配法的优越性:

- 直接辨识非线性动态系统的非线性曲线而不做任何线性化处理;
- 对参数初始值不敏感;
- 具有很好的收敛性和结果的唯一性;
- 辨识出的三次样条函数曲线能光滑无限地逼近非线性曲线.

其不足之处:

- 方法较复杂, 计算时间偏长;
- 不能给出估计精度.

上述仅是从理论分析与实际计算结果得出的结论, 还有待于今后更严格的理论论证来证实.

## 参 考 文 献

- [1] 蔡锁章编. 计算方法. 北京: 北京工业学院出版社, 1987
- [2] 邓建华, 严东升, 刘千刚. 非线性极大似然法及其在飞机参数辨识中的应用. 数据采集与处理, 1989, 4(3): 46—54
- [3] H. G. 雅可普著, 邓建华译著. 静态和动态系统的计算机辅助优化法. 西安: 西北工业大学出版社, 1988

- [4] B. 埃特肯著,何植岱等译. 大气飞行动力学. 北京:科学出版社,1979
- [5] 白丽洁. 应用随机探寻法辨识飞行性能. 西安:西北工业大学硕士论文,1988
- [6] 胡永清. 民用飞机状态估计与参数辨识软件包研究. 西安:西北工业大学硕士论文,1989

## Non-Linear Maximum Likelihood—Optimization Method for Identifying Non-Linear Curve

Deng Jianhua

(Department of Aircraft Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

**Abstract:** In the engineering field we are often faced with a problem that from test data is determined a non-linear curve which is strongly non-linear and not expressed by an analytical formula, e. g. it is absolutely necessary in aircraft flight test data analysis that from flight test data is determined a polar diagram (curve) which is a basic aerodynamic characteristic curve to calculate a flight performance. The above problem may be included in non-linear curve identification. In this paper research on a non-linear maximum likelihood—optimization method for identifying the non-linear curve is presented. A general idea of this method is: first the non-linear curve is approached by a suitable function system (e. g. a cubical spline-polynomial); secondly the non-linear curve identification is transformed into a normal parameter identification; thirdly a criterion of a maximum likelihood function is built; finally is established a unified successive iterate procedure that a criterion of the maximum likelihood function is driven into an extreme using an optimization method. This method has a uniqueness and a good astringency of the maximum likelihood method and a capability of solving a non-linear problem by the optimization method. An identified function curve (e. g. a cubical spline function curve) can approach the non-linear curve unlimitedly smoothly. In this paper a fundamental principle of this method and its application to identify above polar curve of an aircraft are presented.

**Key word:** non-linear curve identification; maximum likelihood method; optimization method; spline function; polar curve of an aircraft