第 8 卷第 4 期
1991 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 4
Dec., 1991

一类分布参数控制系统极点配置的构造

翟 健
(江苏工学院机械工程系，镇江)

摘要：在 Hilbert 空间中，考虑 D. P. S. $\begin{cases}\dot{X}=AX+u\\u=GX=(X,k)g\end{cases}$ 的极点配置问题. 以往的工作，例如[2]，假设 A 仅有单特征值. 本文给出 A 有重特征值时的极点配置定理并推导出极点的配置公式.

关键词：分布参数系统；离散谱算子；重特征值；极点配置

1 概述及引理

考虑分布参数控制系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+u,\\[2mm] u=GX=(X,k)g.\end{cases}$$

其中，$X,u,k,g\in$ Hilbert 空间 H，A 是 H 中的线性算子. 极点配置问题就是在已知开系统 A 的特征值，用反馈算子 G，使闭系统 $A+G$ 具有所要求的极点位置，以往的工作，基本上都是在 A 仅有单特征值的假设下作出的，而且该假设在这些工作中是本质的. 在[3]中研究过 A 有重特征值的问题. 本文对较为广泛的一类系统给出极点配置定理以及配置极点的计算式.

后文将用到下述引理：

引理 1[1] 设 H 是可分 Hilbert 空间，A 是 H 中的稠定离散谱算子，A 的单位分解 $E(\lambda_i)$ 除有限个外，都具有一维值域. 设 d_n 是 A 的特征值集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中 λ_n 到 $\{\lambda_i\}_{i=1,i\neq n}^{\infty}$ 的距离. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{d_n}$ 收敛，则

1) $A+G$ 也是离散谱算子，

2) $\overline{sp}(A+G)=H$.

引理 2[1] 设 A 是 H 空间中的稠定离散谱算子，且 $G=(\ ,k)g$，设复数 $\rho\notin\sigma(A)$. 则

1) ρ 不可能是 $A+G$ 的几何重数大于 1 的特征值.

2) ρ 是 $A+G$ 的代数重数为 m 的特征值的充要条件是

$$\begin{aligned}&m=1\text{ 时},\quad (R(\rho;A)g,k)=1,\quad (R^2(\rho;A)g,k)\neq 0,\\&m>1\text{ 时},\quad (R(\rho;A)g,k)=1,\quad (R^2(\rho;A)g,k)=0,\\&\qquad\qquad\cdots\\&\qquad\qquad (R^m(\rho;A)g,k)=0,\quad (R^{m+1}(\rho;A)g,k)\neq 0.\end{aligned}$$

引理 3 A、H 同上，$\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 A 的特征值集. 则

本文于1990年4月12日收到. 1991年3月18日收到修改稿.

1) $\forall i$,设 λ_i 是 A 的几何重数等于 1 的特征值. λ_i 是 A 的代数重数为 m_i 的特征值的充要条件是

$$\text{当 } m_i=1 \text{ 时},\quad (R(\lambda_i;A+G)g,-k)=1,\quad (R^2(\lambda_i;A+G)g,k)\neq 0,$$

$$\text{当 } m_i>1 \text{ 时},\quad (R(\lambda_i;A+G)g,-k)=1,\quad (R^2(\lambda_i;A+G)g,k)=0,$$

$$\cdots$$

$$(R^{m_i}(\lambda_i;A+G)g,k)=0,\quad (R^{m_i+1}(\lambda_i;A+G)g,k)\neq 0.$$

2) 可以取$\{R(\lambda_i;A+G)g,-R^2(\lambda_i;A+G)g,\cdots,(-1)^{m_i-1}R^{m_i}(\lambda_i;A+G)g\}$作为 A 与 λ_i 对应的广义特征向量.

2 主要定理及计算表达式

定理 1[1] 设 H 是 Hilbert 空间,A 是 H 中的稠定离散谱算子,且 A 的单位分解 $E(\lambda_i)$ 除有限个外,都具有一维值域. $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$是复数列,$g$ 是 H 中的元素. 如果下述条件

1) $\rho_i\notin\sigma_p(A)$, $|\rho_i-\lambda_i|<d_i/2$, $i=1,2,\cdots$;

2) 对任意的正整数 n 以及任意的复数列$\{\beta_1^{(1)},\beta_1^{(2)},\cdots,\beta_1^{(m_1)},\beta_2^{(1)},\cdots,\beta_2^{(m_2)},\cdots,\beta_i^{(1)},\cdots,\beta_i^{(m_i+1)},\cdots,\beta_n^{(1)},\cdots,\beta_n^{(m_n+1)}\}$,都有不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{(1)}+\beta_i^{(m_i+1)}\right|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\beta_i^{(j)}R^j(\rho_i;A)g\right\|$$

成立. 其中 m_i 是 λ_i 的代数重数;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}d_n^{-1}$ 收敛,且$(2M^2\|g\|/d_n)\leqslant\frac{1}{3}$, $n=1,2,\cdots$,(其中 $M/4$ 是 A 的单位分解 E 值域中元素范数的上界)都满足,则可以断言

1) 存在元素 $k\in H$,满足 $\|k\|<1$ 以及

$$\text{当 } m_i>1 \text{ 时},\quad (R(\rho_i;A)g,k)=1,\quad (R^2(\rho_i;A)g,k)=0,$$

$$\cdots$$

$$(R^{m_i}(\rho_i;A)g,k)=0,\quad (R^{m_i+1}(\rho_i;A)g,k)\neq 0.$$

$$\text{当 } m_i=1 \text{ 时},\quad (R(\rho_i;A)g,k)=1,\quad (R^2(\rho_i;A)g,k)\neq 0.$$

2) 算子 $A+G$ 有且仅有特征值$\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$, 且与 ρ_i 相应的广义特征向量是:$R(\rho_i;A)g$, $-R^2(\rho_i;A)g,\cdots,(-1)^{m_i-1}R(\rho_i;A)g$.

3) k 元素是唯一的.

定理 2 A、H 同上,设 A 的广义特征向量$\{\varphi_{i1},\varphi_{i2},\cdots,\varphi_{im_i}\}_{i=1}^{n}\cup\{\varphi_i\}_{i=n+1}^{\infty}$与 A^* 的广义特征向量$\{\Phi_{i1},\Phi_{i2},\cdots,\Phi_{im_i}\}_{i=1}^{n}\cup\{\Phi_i\}_{i=n+1}^{\infty}$构成 H 的双直交基. 在定理 1 的条件下,进一步设 $\begin{cases}g_{ij}=(g,\Phi_{ij})\neq 0\\ g_i=(g,\Phi_i)\neq 0\end{cases}$ $\forall\ i,j$,则 k 可以如下构造:

令 $k_{ij}=(\varphi_{ij},k)$, $k_i=(\varphi_i,k)$,取 $k_{ij}=d_{j1}^i$, $k_i=-\frac{c_i}{g_i}$. 其中 d_{j1}^i由如下方程组确定:

$$\begin{cases}(g_{i1},g_{i2},\cdots,g_{im_i})\begin{pmatrix}d_{11}^i & d_{12}^i & \cdots & d_{1m_i}^i\\ d_{21}^i & d_{22}^i & \cdots & d_{2m_i}^i\\ d_{m_i1}^i & d_{m_i2}^i & \cdots & d_{m_im_i}^i\end{pmatrix}=(c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{im_i}),\\ d_{j+1,k+1}^i=-d_{jk}^i,\quad d_{j,m_i}^i=0;\quad k,j=1,2,\cdots,m_i-1.\end{cases}$$

而 c_{ij}, c_i 可以从下式用留数法确定：

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{z-\rho_i}{z-\lambda_i}\right)^{m_i}\prod_{i=n+1}^{\infty}\frac{z-\rho_i}{z-\lambda_i}=1+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(-1)^{j-1}\frac{c_{ij}}{(z-\lambda_i)^j}+\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{c_i}{z-\lambda_i}.$$

证　只对 $n=1, m_1=2$ 的情况讨论.

令　$\psi_{11}=R(\rho_1;A)g, \psi_{12}=R^2(\rho_1;A)g, \psi_i=R(\rho_i;A)g$. 由于

$$\psi_{11}=R(\rho_1;A)g=g_{11}R(\rho_1;A)\varphi_{11}+g_{12}R(\rho_1;A)\varphi_{12}+\sum_{i=2}^{\infty}g_iR(\rho_i;A)\varphi_i,$$

$$(\lambda_jI-A)R(\rho_1;A)\varphi_j=R(\rho_1;A)(\lambda_jI-A)\varphi_j=0,\quad j\geqslant 2,$$

$$(\lambda_1I-A)R(\rho_1;A)\varphi_{11}=R(\rho_1;A)(\lambda_1I-A)\varphi_{11}=0,$$

$$(\lambda_1I-A)R(\rho_1;A)\varphi_{12}=R(\rho_1;A)(\lambda_1I-A)\varphi_{12}=-R(\rho_1;A)\varphi_{11},$$

$$R(\rho_1;A)\varphi_{11}=\frac{1}{\rho_1-\lambda_1}\varphi_{11},\quad R(\rho_1;A)\varphi_{12}=\frac{1}{\rho_1-\lambda_1}\varphi_{12},\quad R(\rho_1;A)\varphi_j=\frac{1}{\rho_1-\lambda_j}\varphi_j,$$

所以 $\varphi_{11}=\dfrac{g_{11}}{\rho_1-\lambda_1}\varphi_{11}+\dfrac{g_{12}}{\rho_1-\lambda_1}\varphi_{12}+\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty}\frac{g_j}{\rho_1-\lambda_j}\varphi_j,$

$$\varphi_{12}=R^2(\rho_1;A)g=\frac{g_{11}}{(\rho_1-\lambda_1)^2}\varphi_{11}+\frac{g_{12}}{(\rho_1-\lambda_1)^2}\varphi_{12}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{g_j}{(\rho_1-\lambda_j)^2}\varphi_j,$$

$$\varphi_i=\frac{g_{11}}{\rho_i-\lambda_1}\varphi_{11}+\frac{g_{12}}{\rho_i-\lambda_1}\varphi_{12}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{g_j}{\rho_i-\lambda_j}\varphi_j.$$

由引理 3 的 2)知

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{11}&=d_{11}R(\lambda_1;A+G)g+d_{12}R^2(\lambda_1;A+G)g,\\ \varphi_{12}&=d_{21}R(\lambda_1;A+G)g+d_{22}R^2(\lambda_1;A+G)g,\\ \varphi_i&=d_iR(\lambda_i;A+G)g.\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

其中，d_{ij}, d_i 是系数. 如果设 $\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_i, i\geqslant 2$ 与 $\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_i, i\geqslant 2$ 组成 H 空间的双直交基. 令 $g'_{11}=(g,\Psi_{11}), g'_{12}=(g,\Psi_{12}), g'_i=(g,\Psi_i)$，则同样有

$$\begin{aligned}\varphi_{11}=&d_{11}\left\{\frac{g'_{11}\psi_{11}}{\lambda_1-\rho_1}+\frac{g'_{12}\psi_{12}}{\lambda_1-\rho_1}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{g'_i\psi_i}{\lambda_1-\rho_i}\right\}\\&+d_{12}\left\{\frac{g'_{11}\psi_{11}}{(\lambda_1-\rho_1)^2}+\frac{g'_{12}\psi_{12}}{(\rho_1-\lambda_1)^2}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{g'_i\psi_i}{(\lambda_1-\rho_i)^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{21}=&d_{21}\left\{\frac{g'_{11}\psi_{11}}{\lambda_1-\rho_1}+\frac{g'_{12}\psi_{12}}{\lambda_1-\rho_1}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{g'_i\psi_i}{\lambda_1-\rho_i}\right\}\\&+d_{22}\left\{\frac{g'_{11}\psi_{11}}{(\lambda_1-\rho_1)^2}+\frac{g'_{12}\psi_{12}}{(\lambda_1-\rho_1)^2}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{g'_i\psi_i}{(\lambda_1-\rho_i)^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\varphi_j=d_j\left\{\frac{g'_{11}\psi_{11}}{\lambda_j-\rho_1}+\frac{g'_{12}\psi_{12}}{\lambda_j-\rho_1}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{g'_i\psi_i}{\lambda_j-\rho_i}\right\}.$$

在(＊)式两边对 k 求内积，并用引理 3 的 1 可知

$$k_{11}=-d_{11},\quad k_{12}=-d_{12},\quad k_i=-d_i.$$

由于

$$g = g_{11}\varphi_{11} + g_{12}\varphi_{12} + \sum_{i=2}^{\infty} g_i\varphi_i$$

$$= \{g_{11}d_{11} + g_{12}d_{21}\}\left\{\frac{g'_{11}}{\lambda_1-\rho_1}\psi_{11} + \frac{g'_{12}}{\lambda_1-\rho_1}\psi_{12} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{g'_i\psi_i}{\lambda_1-\rho_j}\right\}$$

$$+ \{g_{11}d_{12} + g_{12}d_{22}\}\left\{\frac{g'_{11}\psi_{11}}{(\lambda_1-\rho_1)^2} + \frac{g'_{12}\psi_{12}}{(\lambda_1-\rho_1)^2} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{g'_j\psi_j}{(\lambda_1-\rho_i)^2}\right\}$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} g_i d_i\left\{\sum_{j=2}^{\infty}\frac{g'_j\psi_j}{\lambda_i-\rho_j} + \frac{g'_{11}\psi_{11}}{\lambda_i-\rho_1} + \frac{g'_{12}\psi_{12}}{\lambda_i-\rho_1}\right\}$$

$$= \{g_{11}d_{11} + g_{12}d_{21}\}\left\{\frac{g'_{11}\psi_{11}}{\lambda_1-\rho_1} + \frac{g'_{12}\psi_{12}}{\lambda_1-\rho_1} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{g'_j\psi_j}{\lambda_1-\rho_j}\right\}$$

$$+ \{g_{11}d_{12} + g_{12}d_{22}\}\left\{\frac{g'_{11}\psi_{11}}{(\lambda_1-\rho_1)^2} + \frac{g'_{12}\psi_{12}}{(\lambda_1-\rho_1)^2} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{g'_j\psi_j}{(\lambda_1-\rho_j)^2}\right\}$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} g'_j\psi_j \sum_{i=2}^{\infty}\frac{g_i d_i}{\lambda_i-\rho_j} + (g'_{11}\psi_{11} + g'_{12}\psi_{12})\sum_{i=2}^{\infty}\frac{g_i d_i}{\lambda_i-\rho_1}.$$

此处，两求和号的交换性在最后再作说明.

另一方面，$g=\sum_{j=2}^{\infty} g'_j\psi_j+g'_{11}\psi_{11}+g'_{12}\psi_{12}$，与上式比较后，有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{g_{11}d_{11}+g_{12}d_{21}}{\lambda_1-\rho_1} + \frac{g_{11}d_{12}+g_{12}d_{22}}{(\lambda_1-\rho_1)^2} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{g_i d_i}{\lambda_i-\rho_1} = 1,\\ &\frac{g_{11}d_{11}+g_{12}d_{21}}{\lambda_1-\rho_j} + \frac{g_{11}d_{12}+g_{12}d_{22}}{(\lambda_1-\rho_j)^2} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{g_i d_i}{\lambda_i-\rho_j} = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

令
$$f(z) = \left(\frac{z-\rho_i}{z-\lambda_1}\right)^2\prod_{i=2}^{\infty}\frac{z-\rho_i}{z-\lambda_i} = \left(1-\frac{\rho_1-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right)^2\prod_{i=2}^{\infty}\left(1-\frac{\rho_i-\lambda_i}{z-\lambda_i}\right);$$

为简单起见，假设：$|\rho_i-\lambda_i|<\frac{d_i^{1/2}}{2}$，$\Sigma\frac{1}{d_i^{1/2}}$收敛，此时，由于$\sum_{i=m}^{\infty}\left|\frac{\rho_i-\lambda_i}{z-\lambda_i}\right|\leqslant\sum_{i=m}^{\infty}\frac{d_i^{1/2}}{2(d_i-c_R)}$，后者当 m 充分大时，对 $|z|<R$ 一致收敛，其中，c_R 是仅与 R 有关的常数. 所以 $f(z)$ 是亚纯函数，仅以 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为极点，以 $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为零点. 由于有 $\sum_{i=n}^{\infty}\left|\frac{1}{z-\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_i}\right|\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}\frac{R}{d_i|\lambda_i|}$ 当 n 充分大时收敛.
用 Mittag-Leffer 定理，$f(z)=f(0)+\frac{c_{11}}{z-\lambda_1}+\frac{c_{11}}{\lambda_1}-\frac{c_{12}}{(z-\lambda_1)^2}+\frac{c_2}{\lambda_1^2}+\sum_{n=2}^{\infty}c_n\left(\frac{1}{z-\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n}\right)$. 令 $z\to\infty$（绕过 λ_i），从 $f(z)$ 的两个表达式有 $f(z)=1+\frac{c_{11}}{z-\lambda_1}-\frac{c_{12}}{(z-\lambda_1)^2}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{c_i}{z-\lambda_i}$；令 $z=\rho_j$，有 $\frac{c_{11}}{\lambda_1-\rho_j}+\frac{c_{12}}{(\lambda_1-\rho_j)^2}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{c_i}{\lambda_i-\rho_j}=1$. 与（$**$）式比较知：

$$g_{11}d_{11} + g_{12}d_{21} = c_{11},\quad g_{11}d_{12} + g_{12}d_{22} = c_{12},\quad g_i d_i = c_i.$$

又由

$$\varphi_{11} = (A-\lambda_1 I)\varphi_{12} = -d_{22}R(\lambda_1;A+G)g = d_{11}R(\lambda_1;A+G)g + d_{12}R^2(\lambda_1;A+G)g$$

知 $d_{11}=-d_{22}$，$d_{21}=0$，用留数法不难求出

$$
\begin{cases}
c_{11} = 2(\lambda_1 - \rho_1)\prod\limits_{i=2}^{\infty}\dfrac{\lambda_1-\rho_i}{\lambda_1-\lambda_i} + (\lambda_1-\rho_1)^2\dfrac{(\rho_i-\lambda_i)}{(\lambda_1-\lambda_i)^2}\prod\limits_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{\infty}\dfrac{\lambda_1-\rho_j}{\lambda_1-\lambda_j}, \\
c_{12} = -(\lambda_1-\rho_1)^2\prod\limits_{i=2}^{\infty}\dfrac{\lambda_1-\rho_i}{\lambda_1-\lambda_i}, \\
c_i = (\lambda_i-\rho_i)\prod\limits_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{\infty}\dfrac{\lambda_i-\rho_j}{\lambda_i-\lambda_j}\cdot\left(\dfrac{\lambda_i-\rho_1}{\lambda_i-\lambda_1}\right)^2.
\end{cases}
$$

最后，由于

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=2}^{\infty}g_id_i\sum_{j=n}^{\infty}\frac{g_j'\psi_j}{\lambda_i-\rho_j}\right\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{|g_id_i|}{|\lambda_i-\rho_j|}
\times\left\|\sum_{j=n}^{\infty}g_j'\psi_j\right\| + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty}|g_i|\left\|d_i\sum_{j=n}^{\infty}\frac{g_j'\psi_j}{\lambda_i-\rho_j}\right\|,
$$

注意到 $g_id_i=c_i$ 而 $\Sigma\left|\dfrac{c_i}{\lambda_j-\rho_i}\right|$ 有界，又第二项小于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=n}^{\infty}|g_i|\,\|\varphi_i\|=0$，所以两求和号可交换.

致谢　诚挚地感谢李训经教授对本人的热情鼓励和指导.

参 考 文 献

[1] 翟健. 分布参数控制系统的一般极点配置. 江苏工学院学报，1989，10(3)：96—102

[2] 王康宁，吕涛，邹振宇. 分布参数控制系统的极点配置问题. 中国科学(4)，1982，(2)：172—184

[3] 王康宁. 分布参数控制系统. 北京：科学出版社，1986

The Construction of Generalized Pole-Assignment in Distributed Parameter System

Zhai Jian

(Department of Mechanical Engineering, JiangSu Institute of Technology, Zhenjiang)

Abstract: In Hilbert space H, considered is pole-assignment of D. P. S. $\begin{cases}\dot{X}=AX+u, \\ u=GX=(X,k)g.\end{cases}$ Former paper [2] assumed that operator A had only single eigenvalues. Studied here is that with operator A has multiple eigenvalues. The formula of pole-assignment is given.

Key words: distributed parameter system; spectral operators with discrete spectra; multiple eigenvalues; pole-assignment