第9卷第4期
1992年8月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 4
Aug., 1992

具有H_∞误差边界的Kalman滤波器

刘 频 张钟俊
(上海交通大学自动控制系，200030)

摘要：本文运用H_∞优化理论讨论了在控制系统中的一个重要问题——滤波问题. 提出了一种新的具有H_∞边界的Kalman滤波器. 比较了仅考虑LQG指标与同时考虑LQG与H_∞指标下各类系统的特点，对标准的Kalman滤波器的H_∞特性以及新的LQG/H_∞滤波器与标准的Kalman滤波器的差异与包容特性进行了理论上的详尽分析和讨论. 从这些分析中可以看到LQG/H_∞综合设计的优越性.

关键词：H_∞优化；Kalman滤波器；LQG控制

动态系统理论中的一个基本问题是对状态变量的观测问题. 在时间域上，基于最小方差的二次误差判据基础上的观测理论问题已有很多结果. 观测动态系统的状态通常可运用各类Kalman滤波器来完成，但其缺陷之一是需要知道噪声的谱特性. 本文提出一种新的具有H_∞边界的稳定的Kalman滤波器，该滤波器的最大优点在于不仅考虑误差的二次性能指标，而且还同时考虑到对最坏频率响应的约束. 这样，噪声谱特性发生较大变化时，也可以有较可靠的状态估计. 在实际中我们通常要考虑下面的问题：

已知n-阶动态可观测系统

$$\dot{X}(t) = A_1X(t) + D_1\omega(t), \tag{1a}$$

$$Y(t) = C_1X(t) + D_2\omega(t). \tag{1b}$$

其中X为n维待估计状态，ω为p维标准白噪声过程(干扰信号)，Y为m维输出，且不妨假设A_1为渐近稳定的，需要设计一n阶状态估计器

$$\dot{X}_e(t) = A_eX_e(t) + B_eY(t), \tag{2a}$$

$$Y_e(t) = C_1X_e(t), \tag{2b}$$

使得

1) A_e为渐近稳定的；

2) 由干扰$\omega(t)$至输出误差$Y_1(t)=Y(t)-Y_e(t)$的传递函数阵

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}D \tag{3}$$

满足约束条件

$$\| H(s) \|_\infty < \mu, \tag{4}$$

其中$\mu>0$为给定常数，而

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_eC_1 & A_e \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ B_eD_2 \end{bmatrix}; \tag{5}$$

本文于1990年10月15日收到. 1991年9月19日收到修改稿.

3) L_2 状态估计误差判据

$$J(A_e,B_e)=\lim_{t\to\infty}E\{X_1^{\mathrm T}RX_1\}\tag{6}$$

为最小. 其中 $R=C^{\mathrm T}C,C=[C_1\quad -C_1],X_1^{\mathrm T}=[X^{\mathrm T}\ X_e^{\mathrm T}]$.

由上面的定义我们知道,(1)~(2)的整体闭环系统可以表示为

$$\dot X_1(t)=AX_1(t)+D\omega(t).\tag{7}$$

则(6)此时等价于(由 A_e 是稳定的知 A 亦为稳定的)

$$J(A_e,B_e)=\mathrm{tr}QR.\tag{9}$$

其中 $Q=\lim\limits_{t\to\infty}E\{X_1(t)X_1^{\mathrm T}(t)\}$ 为稳定协方差阵,且满足 $2n$ 阶 Lyapunov 方程

$$AQ+QA^{\mathrm T}+DD^{\mathrm T}=0.\tag{10}$$

引理 1[1]　设 K 为代数 Riccati 方程的一个实对称解

$$A^{\mathrm T}K+KA-(KB+C^{\mathrm T})R^{-1}(B^{\mathrm T}K+C)+Q=0,\tag{11}$$

则 K 满足恒等式

$$\begin{aligned}&R+C(sI-A)^{-1}B+B^{\mathrm T}(zI-A^{\mathrm T})^{-1}C^{\mathrm T}+B^{\mathrm T}(zI-A^{\mathrm T})^{-1}Q(sI-A)^{-1}B\\&=(I+T(z))^{\mathrm T}R(I+T(s))-(z+s)B^{\mathrm T}(zI-A^{\mathrm T})^{-1}K(sI-A)^{-1}B.\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $T(s)=R^{-1}(B^{\mathrm T}K+C)(sI-A)^{-1}B$ 特别地,对所有实数 ω 有

$$H(j\omega,-j\omega)\geqslant 0.\tag{13}$$

这里

$$H(z,s)=R+C(sI-A)^{-1}B+B^{\mathrm T}(zI-A^{\mathrm T})^{-1}C^{\mathrm T}+B^{\mathrm T}(zI-A^{\mathrm T})^{-1}Q(sI-A)^{-1}B.\tag{14}$$

引理 2[1]　设矩阵 A 为稳定的,则不等式

$$D^{\mathrm T}(-j\omega I-A^{\mathrm T})^{-1}C^{\mathrm T}C(j\omega I-A)^{-1}D\leqslant\mu^2I\tag{15}$$

成立的充要条件为代数 Riccati 方程

$$A^{\mathrm T}K+KA-\mu^{-2}KDD^{\mathrm T}K-C^{\mathrm T}C=0\tag{16}$$

存在实对称解 $K=K^{\mathrm T}$.

引理 3　对于传递函数阵(3)给定的 $\mu>0$,下面的叙述是等价的:

1) $\|C(sI-A)^{-1}D\|_\infty\leqslant\mu$. (17)

2) 存在 $X>0$ 使得

$$XA^{\mathrm T}+AX+XC^{\mathrm T}CX+\mu^{-2}DD^{\mathrm T}=0.\tag{18}$$

3)存在 $P\geqslant 0$ 使得

$$A^{\mathrm T}P+PA-\mu^{-2}PDD^{\mathrm T}P+C^{\mathrm T}C=0.\tag{19}$$

同时,(17)式中算式成立的充要条件为

$$\sigma\{A+\mu^{-2}DD^{\mathrm T}P\}\cap\{j\omega\}\neq\text{空集}\ \varnothing.\tag{20}$$

在给出本节主要结果之前,我们首先不失一般性地假设 C_1 为列满秩,D_2 为行满秩. 且根据标准 Kalman 滤波理论假设 $D_1D_2^{\mathrm T}=0$.

定理 1　对于系统(1),若存在状态估计器(2)满足(3)及(4),且使(6)达到最小,则存在对称矩阵 S 使得

$$A_e=A_1-SC_1^{\mathrm T}V_2^{-1}C_1,\tag{21}$$

$$B_e=SC_1^{\mathrm T}V_2^{-1}.\tag{22}$$

其中对称矩阵 S 为下面的 Riccati 方程的解

$$\begin{cases} A_1S + SA_1^T - SC_1^TV_2^{-1}C_1S + D_1D_1^T = 0, \\ \sigma(A_1 - SC_1^TV_2^{-1}C_1) \subset LHP. \end{cases} \tag{23}$$

更进一步地，优化指标给定为

$$J(A_e, B_e) = \mathrm{tr}\{SC_1^TC_1\}. \tag{24}$$

反之，若存在正定对称阵 S 满足(23)，则由(21)与(22)所定义的系统(A_e, B_e)满足 A_e 是渐近稳定的，且具有优化指标(24)，其中 $V_2 = D_2D_2^T$.

证　在上面给定的约束条件(10)与(12)下，为了优化(9)，首先引入 Lagrangian 算子

$$L(A_e, B_e, P, Q, N, F) = \mathrm{tr}\{QR + (AQ + QA^T + DD^T)F + (A^TP + PA + \mu^{-2}PDD^TP + C^TC)N\}.$$

则令

$$\frac{\partial L}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial A_e} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial B_e} = 0.$$

得到必要性条件

$$(A + \mu^{-2}DD^TP)N + N(A + \mu^{-2}DD^TP)^T = 0, \tag{25}$$

$$A^TF + FA + R = 0, \tag{26}$$

$$Z_{22} + Y_{22}^T = 0, \tag{27}$$

$$Z_{21}C_1^T + (Z_{21}P_{12} + Z_{22}P_2)B_eD_2D_2^T + Y_{12}^TC_1^T + F_2B_eD_2D_2^T = 0. \tag{28}$$

其中 P_{ij}, Z_{ij}, Y_{ij} 满足分块

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix}, \quad PN = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}, \quad QF = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

而将 Q, N, F 分块为

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 & N_{12} \\ N_{12}^T & N_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 & F_{12} \\ F_{12}^T & F_2 \end{bmatrix}.$$

由引理 3 知，约束 $\|H(s)\|_\infty < \mu$ 成立的充要条件是(19)成立，同时由性质(20)知，在此条件下，$\sigma(A + \mu^{-2}DD^TP) \cap C_0 = \varnothing$，因此，在(4)的条件下，方程(25)只有唯一零解，即 $N \equiv 0$. 综合(25)～(28)及(19)、(10)，并将上面的分块代入得下面的联立方程组：

$$A^TP + PA + \mu^{-2}PDD^TP + C^TC = 0, \tag{29}$$

$$N = 0, \tag{30}$$

$$Y_{22} = Q_{12}^TF_{12} + Q_2F_2 = 0, \tag{31}$$

$$Y_{12}^TC_1^T + F_2B_eD_2D_2^T = 0, \tag{32}$$

$$A_1^TF_1 + F_1A_1 + C_1^TB_e^TF_{12}^T + F_{12}B_eC_1 + C_1^TC_1 = 0, \tag{33}$$

$$A_1^TF_{12} + C_1^TB_e^TF_2 + F_{12}A_e - C_1^TC_1 = 0, \tag{34}$$

$$A_e^TF_2 + F_2A_e + C_1^TC_1 = 0, \tag{35}$$

$$A_1Q_1 + Q_1A_1^T + D_1D_1^T = 0, \tag{36}$$

$$A_1Q_{12} + Q_1C_1^TB_e^T + Q_{12}A_e^T + D_1D_2^TB_e^T = 0, \tag{37}$$

$$A_eQ_2 + Q_2A_e^T + B_eC_1Q_{12} + Q_{12}^TC_1^TB_e^T + B_eD_2D_2^TB_e^T = 0. \tag{38}$$

令 $V_2 = D_2D_2^T$，由 D_2 的行满秩特性知 V_2 可逆. 由要求 A_e 为稳定及(A_e, B_e, C_e)为最小实现知存在正定解 F_2，故由(32)与(31)得

$$B_e = (-F_2^{-1}F_{12}^{\mathrm{T}}Q_1 - Q_{12}^{\mathrm{T}})C_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1} = -F_2^{-1}F_{12}^{\mathrm{T}}(Q_1 - Q_{12}Q_2^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}})C_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}. \tag{39}$$

同理由 A_e 的稳定性假设及(38)知 $Q_2>0$，由 $Q_{12}^{\mathrm{T}}(34)+Q_2(35)$ 得

$$Q_{12}^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}F_{12} + Q_{12}^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}B_e^{\mathrm{T}}F_2 + Q_2A_e^{\mathrm{T}}F_2 - Q_{12}^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}C_1 + Q_2C_1^{\mathrm{T}}C_1 = 0.$$

即

$$A_e = -F_2^{-1}F_{12}^{\mathrm{T}}A_1Q_{12}Q_2^{-1} - B_eC_1Q_{12}Q_2^{-1} + F_2^{-1}C_1^{\mathrm{T}}C_1Q_{12}Q_2^{-1} - F_2^{-1}C_1^{\mathrm{T}}C_1. \tag{40}$$

将(40)，(39)代入(37)，(38)然后进行整理运算得

$$Q_{12}Q_2^{-1}F_2^{-1}C_1^{\mathrm{T}}C_1Q_{12}Q_2^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}} = Q_{12}Q_2^{-1}F_2^{-1}C_1^{\mathrm{T}}C_1Q_{12}^{\mathrm{T}}.$$

又由(31)知 $Q_{12}^{\mathrm{T}}F_{12}=-Q_2F_2$. 而 Q_{12}, F_{12} 均为 n 阶方阵，故 Q_{12}, F_{12} 均可逆. 再由假设知 $C_1^{\mathrm{T}}C_1$ 亦为可逆方阵，故由上式直接可得

$$Q_{12}Q_2^{-1} = I,$$

或

$$Q_{12} = Q_2.$$

代入(36)～(38)则有

$$A_1(Q_1 - Q_2) + (Q_1 - Q_2)A_1^{\mathrm{T}} - (Q_1 - Q_2)C_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1(Q_1 - Q_2) + D_1D_1^{\mathrm{T}} = 0.$$

则由(36)得

$$B_e = (Q_1 - Q_2)C_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1} = SC_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}.$$

同理可由(40)得 A_e 如(21). 另外，将 $Q_{12}=Q_{12}^{\mathrm{T}}+Q_2$ 代入(4)直接可得(24). 证毕.

需要特别注意的是，定理 1 中给出的滤波器(21)～(23)与 μ 的大小无直接关系，它实质上就是一个标准的 Kalman 滤波器. 从整个推导过程可以看出，其仅仅是整个优化问题的解的必要条件，但不是充分的. 主要在于 (A_e, B_e) 的选择是在(29)成立的前提下给出的. 而(21)～(23)给定的 (A_e, B_e) 并不能保证(29)成立. 我们下面来具体讨论这个问题.

将(21)～(23)代入(17)的 Hamilton 矩阵得

$$H = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \mu^{-2}D_1D_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ SC_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1 & A_1 - SC_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1 & 0 & \mu^{-2}SC_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1S \\ -C_1^{\mathrm{T}}C_1 & C_1^{\mathrm{T}}C_1 & -A_1^{\mathrm{T}} & C_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1S \\ C_1^{\mathrm{T}}C_1 & -C_1^{\mathrm{T}}C_1 & 0 & -A_1^{\mathrm{T}} + C_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1S \end{bmatrix}.$$

对此矩阵进行相似变换得

$$H \sim \begin{bmatrix} A_1 & \mu^{-2}D_1D_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & -A_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^{-2}D_1D_1^{\mathrm{T}} & A_1 - SC_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1 & \mu^{-2}(D_1D_1^{\mathrm{T}} + SC_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1S) \\ 0 & 0 & -C_1^{\mathrm{T}}C_1 & -A_1^{\mathrm{T}} + C_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1S \end{bmatrix}.$$

因 A_1 是稳定的，因此，若需 H 在虚轴上无谱分布，其充要条件为下面的矩阵

$$\begin{bmatrix} A_1 - SC_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1 & \mu^{-2}(D_1D_1^{\mathrm{T}} + SC_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1S) \\ -C_1^{\mathrm{T}}C_1 & -A_1^{\mathrm{T}} + C_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1S \end{bmatrix}$$

在虚轴上无谱分布. 当 $\mu\to\infty$ 时，该矩阵的谱与 $A_e, -A_e^{\mathrm{T}}$ 相同. 因此，对于(21)～(23)给定的 A_e, B_e，总存在一有界的 $\mu>0$，使(4)成立，但 μ 不能任意小，即由(21)～(23)设计的标准的 Kalman 滤波器 (A_e, B_e) 不能对任意小的 μ 均满足(29). 也就是说，上面方法设计的滤波器不能满足鲁棒性条件(29).

下面我们从另外一个角度来考虑优化问题(1)～(6). 我们将指标(6)改为

$$J_1(A_e, B_e, P) = \mathrm{tr}PR. \tag{41}$$

其中对称阵 $P \geqslant 0$ 满足 Riccati 方程

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \mu^{-2}PC^{\mathrm{T}}CP + DD^{\mathrm{T}} = 0. \tag{42}$$

那么,我们就可以定义辅助 Kalman 滤波问题如下:对于(1)给定的系统,确定状态估计器(2)使得在(3),(4)成立的条件下,优化指标(41)达到最小.

我们首先证明,辅助问题是优化问题的一个优化解.

引理 4 当 $\mu > 0$ 使(21)～(23)定义的系统满足约束(4)时有

$$J_1(A_e, B_e, P) \geqslant J(A_e, B_e).$$

证 我们知道,当此引理的条件满足时,存在正定阵 P、Q 使得

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \mu^{-2}PC^{\mathrm{T}}CP + DD^{\mathrm{T}} = 0, \tag{43}$$

$$AQ + QA^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}} = 0. \tag{44}$$

由(42),(43)得

$$A(P-Q) + (P-Q)A^{\mathrm{T}} + \mu^{-2}PC^{\mathrm{T}}CP = 0.$$

由于 A 是稳定的,故 $P - Q \geqslant 0$. 而

$$J_1(A_e, B_e, P) = \mathrm{tr}PR, \quad J(A_e, B_e) = \mathrm{tr}QR.$$

故

$$J_1 - J = \mathrm{tr}(P-Q)R \geqslant 0.$$

证毕.

尽管辅助问题是优化问题的次优解,但通过下面的讨论我们将看到,辅助问题保证了对于比较小的 $\mu > 0$,均可设计出一状态观测器(2)满足约束条件(4),且同时使(41)达到最小. 也就是说,用辅助优化方法设计的滤波器比前面所得的标准的 Kalman 滤波方法具有更强的鲁棒性.

定理 2 对于系统(1),若存在状态估计器(2)满足(3)与(4),且使指标函数(41)达到最小,则存在对称阵 $S > 0$ 使得

$$A_e = A_1 - SC_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}C_1, \tag{45}$$

$$B_e = AC_1^{\mathrm{T}}V_2^{-1}. \tag{46}$$

且 S 为下面的 Riccati 方程的解

$$A_1S + SA_1^{\mathrm{T}} + SC_1^{\mathrm{T}}(\mu^{-2}I - V_2^{-1})C_1S + D_1D_1^{\mathrm{T}} = 0. \tag{47}$$

更进一步地,辅助优化指标给定为

$$J_1(A_e, B_e, S) = \mathrm{tr}\{SC_1^{\mathrm{T}}C_1\}. \tag{48}$$

反之,若存在非负对称阵 S 满足(47),则由(45),(46)定义的系统 (A_e, B_e) 为辅助优化问题的解.

此定理的证明方法完全类似于定理 1 之证明方法. 容易验证,滤波器(45)～(47)满足 H∞ 约束. 事实上,若存在 S 满足(47),则将(45),(46)定义的 (A_e, B_e) 代入(4)对应的 Hamilton 阵为

$$\begin{bmatrix} A & DD^{\mathrm{T}} \\ -\mu^{-2}C^{\mathrm{T}}C & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} A_1 & 0 & D_1D_1^T & 0 \\ SC_1^TV_2^{-1}C_1 & A_1 - SC_1^TV_2^{-1}C_1 & 0 & SC_1^TV_2^{-1}C_1S + D_1D_1^T \\ -\mu^{-2}C_1^TC_1 & \mu^{-2}C_1^TC_1 & -A_1^T & -C_1^TV_2^{-1}C_1S \\ \mu^{-2}C_1^TC_1 & -\mu^{-2}C_1^TC_1 & 0 & -A_1^T + C_1^TV_2^{-1}C_1S \end{bmatrix}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} A_1 & D_1D_1^T & 0 & 0 \\ 0 & -A_1^T & 0 & 0 \\ 0 & -D_1D_1^T & A_1 - SC_1^TV_2^{-1}C_1 + \mu^{-2}SC_1^TC_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^{-2}C_1^TC_1 & -A_1^T + C_1^TV_2^{-1}C_1 - \mu^{-2}C_1^TC_1S \end{bmatrix}.
$$

由 A_1 的稳定性与 (C_1, A_1) 的可观测性及(47)易知,此系统在虚轴上无谱分布,即 (A_e, B_e) 满足约束条件(4). 我们曾通过计算机进行过数值分析,说明了标准 Kalman 滤波器与具有 H_∞ 误差边界约束的滤波器之间的关系及各自的特点如下(详见文献[2]):

1) 当 μ 充分大时,两种滤波器的构成与性能指标是一致的. 这说明 LQG/H_∞ 滤波器是标准 Kalman 滤波器的延拓,前者包容了后者,而后者是前者的特例.

2) 对于 LQG/H_∞ 滤波器来说,性能指标的好环与 μ 的大小密切相关. 从仿真结果来看,μ 越小,J 越大. 也就是说,系统的鲁棒性与稳态性能指标成反比。

3)当噪声谱分布有摄动或噪声谱发生变化时,LQG/H_∞ 方法显示出比标准 Kalman 滤波器优越的鲁棒性.

限于篇幅,本文就不将结果在此一一列举了.

参 考 文 献

[1] Willems, J. C.. Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation. IEEE Trans. Automat. Control, 1971, 16(6):621—634

[2] 刘频. 状态空间中的 H_∞ 控制方法研究. 长沙:国防科技大学博士论文,1990

A Stable Kalman Filtering with H_∞ Error Bound

LIU Pin and ZHANG Zhongjun

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University • Shanghai, 200030, PRC)

Abstract: A new Kalman filter with H_∞ bound has been discussed. This filter not only has a general LQG criterion, but also considers the H_∞ property. It is a continuation of normal LQG Kalman filter. Simulation results which give the comparison between the two filters are shown that the LQG/H_∞ Kalman filter has an advantage of improving robustness.

Key words: H_∞ optimizatin; Kalman filter; LQG control

本文作者简介

刘 频 见本刊 1992 年第 2 期 134 页.

张钟俊 1915 年生. 1938 年在美国 MIT 获科学博士学位. 现为中国科学院学部委员,博士后导师. 目前的研究方向是:工业大系统理论,经济控制论,机器人控制及智能控制等.