一种快速跟踪的鲁棒自校正控制器

崔俊峰
(北京卫星环境工程研究所,100029)
吴广玉
(哈尔滨工业大学自动控制系,150006)

摘要: 本文给出了保证自校正控制器鲁棒稳定的充分条件,所得结论用于对时变参数非最小相位系统的自校正控制,可使输出尽量快速地跟踪设定值. 文中给出数字仿真示例.

关键词: 自校正控制;鲁棒稳定性

1 方法的描述

设被控过程为

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\varepsilon(k). \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &\triangleq A = 1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n}, \\ B(z^{-1}) &\triangleq B = b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_nz^{-n}, \\ C(z^{-1}) &\triangleq C = c_0 + c_1z^{-1} + \cdots + c_nz^{-n}, \end{aligned}$$

$\varepsilon(k)$ 为零均值白噪声. (2)

将多项式 $C(z^{-1})$ 作以下分解

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1}).$$

其中

$$\begin{aligned} F(z^{-1}) &\triangleq F = 1 + f_1z^{-1} + \cdots + f_{d-1}z^{-d+1}, \\ G(z^{-1}) &\triangleq G = g_0 + g_1z^{-1} + \cdots + g_nz^{-n}. \end{aligned}$$

这样,可由(1)式得到系统 d 步向前预报模型为

$$y(k+d) = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}F(k) + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k) + F(z^{-1})\varepsilon(k+d).$$

在保证预报方差为最小的前提下,可以得到最优预报器为

$$\hat{y}^*(k+d/k) = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k). \tag{3}$$

根据自校正控制器的原理,取定目标函数

$$I = E\{[\hat{y}^*(k+d) - y_r(k+d)]^2 + \lambda b_0[u(k)]^2\}.$$

选 $u(k)$,使目标函数 I 最小得

$$\frac{\partial I}{\partial u(k)} = 2[\hat{y}^*(k+d/k) - y_r(k+d)]b_0 + 2\lambda b_0u(k).$$

于是得 I 最小的控制律为

$$\hat{y}^*(k+d/k) + \lambda u(k) - y_r(k+d) = 0. \tag{4}$$

本文于1990年11月7日收到. 1991年9月16日收到修改稿.

其中 $y_r(k+d)$ 为第 $k+d$ 拍的设定值；

$y^*(k+d/k)$ 为基于前 k 拍的数据对第 $k+d$ 拍的最优预报值；

$u(k)$ 为第 k 拍的控制量.

将(3)式代入(4)式，可得闭环控制方程为

$$[\lambda A(z^{-1})+B(z^{-1})]y(k)=B(z^{-1})y_r(k)+e(k).$$

其中 $e(k)$ 为若干拍 $\varepsilon(k)$ 的线性组合. (5)

由此可得闭环特征方程为

$$\lambda A(z^{-1})+B(z^{-1})=0,$$

或
$$(\lambda+b_0)+(\lambda a_1+b_1)z^{-1}+\cdots+(\lambda a_n+b_n)z^{-n}=0 \tag{6}$$

作双线性变换 $z=\dfrac{s+1}{s-1}$，并整理后得

$$K_0s^n+K_1s^{n-1}+\cdots+K_{n-1}s+K_n=0. \tag{7}$$

且
$$\begin{bmatrix}K_0\\ \vdots\\ K_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_n^0 & C_{n-1}^0 & \cdots & C_{n-1}^0C_1^0 & C_n^0\\ & & & \vdots & \\ C_n^n & C_{n-1}^{n-1} & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & (-1)^nC_n^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda+b_0\\ \vdots\\ \lambda a_n+b_n\end{bmatrix}$$ [2].

这样，就可以用经典的稳定性理论来选择使闭环方程稳定的 λ 值. 由于 $K_0,K_1,\cdots,K_n$ 等皆为 λ 的函数，所以求得的 λ 值可能是一个或数个区间，此时就可以选取其并集作稳定区域，以保证闭环方程的所有根在 s 平面的左半平面.

当过程参数是未知可变时，则可以与在线辨识过程结合在一起，实时地提供辨识参数值，可以实时地计算出 λ 值. 由于 λ 值是实时得出的，所以比按最保守估计取定的 λ 值更具快速性，同时，只要选 λ 不出一定的区域即为稳定的，因此，本方法具有快速性和鲁棒稳定性.

2 鲁棒稳定性条件分析

2.1 稳定性条件分析

引理[3] 设 ξ 为复系数代数方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的根，且设 γ 为任意正数，则 $|\xi|\leqslant\tau_1$，其中

$$\tau_1=\max\left\{\frac{1}{\gamma},\frac{|a_1|}{|a_0|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\gamma+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\gamma^{n-1}\right\}.$$

特别地，取 $\gamma=1$，则有

$$\tau_1=\max\left\{1,\frac{1}{|a_0|}\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right\}.$$

这是一个根的范围估计引理. 利用这个引理，可以给出下面稳定性条件.

由(6)式可得闭环特征方程

$$\lambda A(z^{-1})+B(z^{-1})=0.$$

展开后同乘 z^n 有

$$(\lambda+b_0)z^n+(\lambda a_1+b_1)z^{n-1}+\cdots+(\lambda a_n+b_n)=0.$$

利用引理，可得其 z 平面上根的范围

$$|z| \leqslant \max\left\{1,\ \frac{1}{|\lambda + b_0|}\sum_{i=1}^{n}|\lambda a_i + b_i|\right\}.$$

显然,若

$$\frac{1}{|\lambda + b_0|}\sum_{i=1}^{n}|\lambda a_i + b_i| < 1,$$

则$|z|\leqslant 1$,系统一定稳定,即系统的稳定性条件为

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\lambda a_i + b_i}{\lambda + b_0}\right| < 1,$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}\left|a_i + \frac{b_i - b_0 a_i}{\lambda + b_0}\right| < 1. \tag{8}$$

显然,若下式

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i| + \frac{1}{|\lambda + b_0|}\sum_{i=1}^{n}|b_i - b_0 a_i| < 1,$$

或

$$|\lambda + b_0| > \frac{\sum_{i=1}^{n}|b_i - b_0 a_i|}{1 - \sum_{i=1}^{n}|a_i|},\quad \left(1 - \sum_{i=1}^{n}|a_i| > 0\right). \tag{9}$$

则(8)式必定成立.

进一步,若$\lambda>0$,则有

$$\lambda > |b_0| + \frac{\sum_{i=1}^{n}|b_i - b_0 a_i|}{1 - \sum_{i=1}^{n}|a_i|}. \tag{10}$$

就是稳定性的充分条件,这个条件可进一步简化如下,若

$$\lambda > |b_0| + \frac{\sum_{i=1}^{n}|b_i| + \sum_{i=1}^{n}|a_i||b_0|}{1 - \sum_{i=1}^{n}|a_i|},$$

即

$$\lambda > \frac{|b_0| + \sum_{i=1}^{n}|b_i|}{1 - \sum_{i=1}^{n}|a_i|}. \tag{11}$$

则(10)式一定满足.这样作,增加了系统稳定性分析的保守性.

2.2 鲁棒性条件分析

一般由于参数估计及未建模动态等原因,使系统的真值和数学模型间有一定的差别,于是(11)式应改为

$$\lambda > \frac{|b_0 + \Delta b_0| + \sum_{i=1}^{n}|b_i + \Delta b_i|}{1 - \sum_{i=1}^{n}|a_i + \Delta a_i|}. \tag{12}$$

显然,若下式

$$\lambda > \frac{|b_0| + \sum_{i=1}^{n}|b_i| + \sum_{i=0}^{n}|\Delta b_i|}{1 - \sum_{i=0}^{n}|a_i|}$$

成立,则(12)式一定成立.

设 λ_m 为系统真值与数学模型绝对一致时选取的 λ,即标称系统的 λ,则当

$$|\lambda| > |\lambda_m| + |\Delta\lambda| \tag{13}$$

成立时,此系统一定稳定,其中

$$\lambda_m = \frac{|b_0| + \sum_{i=1}^{n}|b_i|}{1 - \sum_{i=1}^{n}|a_i|}, \quad \Delta\lambda = \frac{\sum_{i=0}^{n}|\Delta b_i|}{1 - \sum_{i=1}^{n}|a_i|}.$$

当满足(13)式时,系统的稳定具有鲁棒性.由于 $\Delta a_i, \Delta b_i$ 未知,且 $\Delta\lambda$ 本身为 λ 的函数,所以选取一个精确的 $\Delta\lambda$ 值几乎是不可能的,在实际应用中通常在理想 λ_m 基础上增加一个增量,不同的系统,其增量 $\Delta\lambda$ 也不相同.

2.3 系统稳态跟踪设定值条件

在很多系统中不仅要求系统的快速性和鲁棒稳定性,而且要求系统稳态后要准确跟踪设定值.为此,重新构造目标函数如下

$$I = E\{[\hat{y}^*(k+d) - y_r(k+d)]^2 + \lambda b_0[u(k) - u(k-1)]^2\}.$$

选 $u(k)$ 使目标函数 I 最小,得

$$\frac{\partial I}{\partial u(k)} = 2[\hat{y}^*(k+d/k) - y_r(k+d)]b_0 + 2\lambda b_0[u(k) - u(k-1)].$$

于是使 I 为最小的控制律为

$$\hat{y}^*(k+d/k) + \lambda[u(k) - u(k-1)] - y_r(k+d) = 0. \tag{14}$$

其中各值的意义同上.

将(14)式代入(4)式,可得闭环控制方程为

$$[(1 - z^{-1})\lambda A(z^{-1}) + B(z^{-1})]y(k) = B(z^{-1})y_r(k) + e(k).$$

由此式可见:当系统稳定后,由于 $y(k)=y(k-1)$,所以一定满足 $E\{y(k)\}=y_r(k)$.

3 仿真验证

现给出一个简单的系统

$$y(k) = 0.75y(k-1) + u(k-1) + b_1u(k-2) + e(k).$$

以验证上述结论,这里 b_1 参数可变,初始时令 $b_1=3$.这是一个非最小相位系统.图1为参数可变时.按上述的快速、鲁棒和稳态跟踪设定值为原则,选取 λ 后的响应波形.

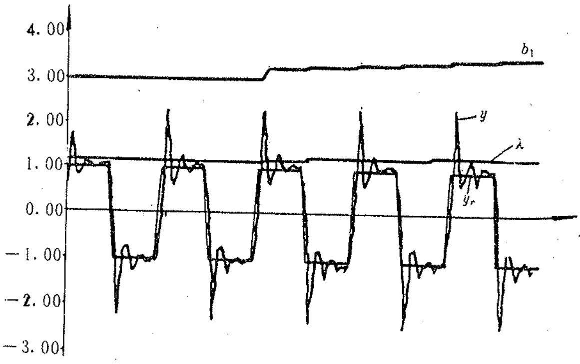

图1 b_1参数跳变和缓变时的输出波形及自适应因子 λ 的变化波形,其中 y_r 为标准输入

4 结　论

1) 本方法可对参数为时变的非最小相位系统进行快速稳定的跟踪控制.

2) 用自校正控制器对非最小相位系统进行稳定控制的充分条件由(11)式给出.

3) 用自校正控制器对非最小相位系统进行控制时,当系统真值与数学模型不一致时,稳定的充分条件由(13)式给出.

4)当性能指标

$$I = E\{[\hat{y}^*(k+d) - y_r(k+d)]^2 + \lambda b_0[u(k) - u(k-1)]^2\}$$

时,系统能稳态准确跟踪设定值.

参　考　文　献

[1] 吴广玉主编. 系统辨识与自适应控制(下). 哈尔滨工业大学出版社,1987,18—47

[2] 吴广玉,杜文广. 一种稳健的自校正调节器——变 β_0 的自校正算法. 控制理论与应用年会论文集(下),1988,510—512

[3] 数学手册编写组. 数学手册. 人民教育出版社,1979,93

A Robust Self-Tuning Controller for Fast Following

CUI Junfeng

(Beijing Institute of Satellite Environment Engineering · Beijing, 100029, PRC)

WU Guangyu

(Department of Automatic Control, Haerbin Institute of Technology · Haerbin, 150006, PRC)

Abstract: The sufficient condition for ensuring the robust stability of a self-tuning controller is given in this paper. The conclusion is used to self-tuning controller of a non-minimum phase system with time-varying parameters and the system output may follow the servo-input as fast as possible, and a simulation example is presented.

Key words: self-tuning controller; robust stability

本文作者简介

崔俊峰　1965年生. 1986年毕业于太原工业大学电机系工业电气自动化专业. 1990年获哈尔滨工业大学自动控制系飞行器导航、制导仿真专业硕士学位. 曾从事线性系统的快速仿真工作. 现在北京卫星环境工程研究所工作. 目前研究兴趣和领域是自适应控制的各种算法的比较及在实际某温控过程中的应用效果.

吴广玉　1932年生. 1958年毕业于哈尔滨工业大学机械工程系机床设计专业. 毕业后,先后在本校机械工程系机床设计专业,航天工程系飞行器总体设计与工艺专业,控制工程系自动控制专业从事教学与科研工作. 现为控制工程系教授,并任哈尔滨工业大学航天学院副院长. 目前研究兴趣和领域为:现代控制理论(系统辨识与自适应控制)在惯性导航系统中的应用和惯性器件与系统的测试技术(方法与设备)的研究.