第1卷 创刊号　　控制理论与应用　　Vol. 1, Initial Issue
1984年1月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　January, 1984

一类时滞微分系统无条件稳定的条件

秦元勋　　俞元洪
（中国科学院应用数学研究所）

摘　　要

本文给出系统

$$\frac{dx(t)}{dt}=a_1x(t)+a_2x(t-\tau)+b_1y(t)+b_2y(t-\tau),$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=c_1x(t)+c_2x(t-\tau)+d_1y(t)+d_2y(t-\tau)$$

对任意时滞 $\tau\geq 0$ 为无条件稳定的必要与充分条件。这个问题是由 A. A Андронов[1] 在 1946 年提出的，1960 年文〔2〕给出了这个问题的初步结果。本文给出了这个结果的明显形式，它是在判定四次代数方程在区间〔－1，1〕内无实根的基础上得到的。为了工程技术人员的方便，我们也给出了这个判定的明显形式。

一、引　　言

考虑时滞微分系统

$$\frac{dx_s(t)}{dx}=\sum_{j=1}^{n}\left[a_{sj}x_j(t)+b_{sj}x_j(t-\tau)\right], \tag{1.1}$$

此处 a_{sj}、b_{sj} $(s=1, 2, \cdots\cdots, n)$ 为实常数。

如果对任何实数 $\tau\geq 0$，系统（1.1）的零解均为渐近稳定，则称系统（1.1）为无条件稳定。

时滞微分系统的无条件稳定性，最早出现在文〔1〕和文〔2〕中。1946 年 A. A. Андронов 在文〔1〕中提出了当 $n=2$ 时系统（1.1）无条件稳定的充要条件问题。1960 年文〔2〕给出了这个问题的初步结果。文〔3〕指出了时滞系统无条件稳定性的判定可以归结为代数方程在区间〔－1，1〕内无实根的判定。对于代数方程根的研究是一个古老的问题，但由于它在动力系统稳定性理论的很多方面均有应用，因此仍引起不少作者的研究。经典的方法如 Sturm 定理等都是针对数字系统给出的。文字系统的结果较早是出现在文〔2〕中，它给出了四次方程无实根的完整的条件，但其结果的形

本文于 1983 年 5 月 6 日收到。1983年 6 月29日收到修改稿。

式不够明显。其后，文〔4〕从四次方程的求根公式，文〔5〕用Hurwitz方法都导出一些结果，但他们的条件都不完整。本文不依赖于经典的公式，直接将四次方程化为两个参数的形式，在参数平面上对根的分布给以全面分析，从而导出方程无实根的完整而具有明显形式的条件。它们将在第二节和第三节中给出。最后，在第四节中我们在文〔3〕定理1的基础上导出当 $n=2$ 时系统（1.1）无条件稳定的充要条件。条件是以明显的形式给出的，从而完整地解决了A. A. Андронов 在文〔1〕中提出的问题。

二、三次方程在〔−1，1〕上无实根的充要条件

考虑实系数三次方程

$$f(x)\equiv a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0, \tag{2.1}$$

此处 $a_3>0$。引入变换

$$x=y-\frac{a_2}{3a_3}, \tag{2.2}$$

将方程（2.1）化为

$$F(y)\equiv y^3+py+q=0, \tag{2.3}$$

此处

$$p=\frac{3a_1a_3-a_2^2}{3a_3^2},\qquad q=\frac{27a_0a_3^2-9a_1a_2a_3+2a_2^3}{27a_3^3}。 \tag{2.4}$$

解方程组

$$\begin{cases} F(y)\equiv y^3+py+q=0, \\ F'(y)\equiv 3y^2+p=0, \end{cases} \tag{2.5}$$

得方程（2.3）有重根的条件为

$$H(p,q)\equiv\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0。 \tag{2.6}$$

下面的结论是熟知的：

引理 2.1　当 $H>0$ 时，方程（2.3）只有一个实根；当 $H\leq 0$ 时，方程（2.3）有三个实根。

引理 2.2　方程（2.3）在区间〔a，b〕中无实根的充要条件为下列三组条件之一成立：

1）$H>0$，$F(a)F(b)>0$；

2）$H\leq 0$，$F(a)<0$，$F(b)<0$，$(y_1'-a)(y_1'-b)>0$；

3）$H\leq 0$，$F(a)>0$，$F(b)>0$，$(y_2'-a)(y_2'-b)>0$，

此处

$y'_1=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$，$y'_2=\sqrt{-\frac{p}{3}}$ 是 $F'(y)=0$ 的两个根。a 和 b 为实数，且 $a\le b$。在第三节中亦同样。

由此回到方程（2.1），我们有

引理 2.3　方程(2.1)在〔-1，1〕上无实根的充要条件为下列三组条件之一成立：

1）$H>0$，$f(-1)f(1)>0$；

2）$H\le 0$，$f(-1)<0$，$f(1)<0$，$\left|x'_1\right|>1$；

3）$H\le 0$，$f(-1)>0$，$f(1)>0$，$\left|x'_2\right|>1$，

此处

$$x'_1=\frac{-a_2-\sqrt{a_2^2-3a_1a_3}}{3a_3},\quad x'_2=\frac{-a_2+\sqrt{a_2^2-3a_1a_3}}{3a_3},$$

是 $f'(x)\equiv 3a_3x^2+2a_2x+a_1=0$ 的两个根，

$$H=\frac{1}{108a_3{}^4}(27a_0{}^2a_3{}^2-a_1{}^2a_2{}^2+4a_0a_2{}^3+4a_1{}^3a_3-18a_0a_1a_2a_3)。$$

最后将引理 2.3 的条件用方程（2.1）的系统明显地表示如下。

定理 2.1　方程（2.1）在〔-1,1〕中无实根的充要条件为下列三组条件之一成立：

1）$\overline{H}>0$，$|a_0+a_2|>|a_1+a_3|$；

2）$\overline{H}\le 0$，$a_0+a_2<-|a_1+a_3|$，$a_3<\frac{1}{3}\left|a_2+\sqrt{a_2{}^2-3a_1a_3}\right|$；

3）$\overline{H}\le 0$，$a_0+a_2>|a_1+a_3|$，$a_3<\frac{1}{3}\left|a_2-\sqrt{a_2{}^2-3a_1a_3}\right|$。

此处

$\overline{H}=27a_0{}^2a_3{}^2-a_1{}^2a_2{}^2+4a_0a_2{}^3+4a_1{}^3a_3-18a_0a_1a_2a_3$。

注：本节定理和引理均为显然，证明从略。

三、四次方程在〔-1，1〕上无实根的充要条件

考虑实系统四次方程

$$f(x)\equiv a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0, \tag{3.1}$$

此处 $a_4>0$。下面通过若干引理来导出方程（3.1）在区间〔-1，1〕上无实根的充要条件。

引理 3.1　方程（3.1）可以化为如下形式：

$$F(Z)\equiv Z^4+(\mathrm{sgn}B_2)Z^2+C_1Z+C_0=0, \tag{3.2}$$

此处 B_2、C_1 和 C_0 见（3.4）、（3.5）和（3.6）。

$$\mathrm{sgn}B_2=\begin{cases}1 & 当\ B_2>0\ 时,\\ 0 & 当\ B_2=0\ 时,\\ -1 & 当\ B_2<0\ 时。\end{cases}$$

证　引入变换

$$x=y-\frac{a_3}{4a_4},$$

方程（3.1）化为

$$y^4+B_2y^2+B_1y+B_0=0, \tag{3.3}$$

此处

$$\left.\begin{aligned}&B_2=\frac{8a_2a_4-3a_3^2}{8a_4^2},\quad B_1=\frac{8a_1a_4^2-4a_2a_3a_4+a_3^3}{8a_4^3},\\ &B_0=\frac{256a_0a_4^3-64a_1a_3a_4^2+16a_2a_3^2a_4-3a_3^4}{256a_4^4}。\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

当 $B_2=0$ 时，我们令

$$C_1=B_1,\quad C_0=B_0, \tag{3.5}$$

则方程（3.3）即为方程（3.2）；

当 $B_2\neq0$ 时，引入变换 $Z=y/\sqrt{|B_2|}$，且令

$$C_1=B_1/|B_2|^{3/2},\ C_0=B_0/B_2^2, \tag{3.6}$$

则方程（3.3）即化为（3.2）。引理 3.1 证毕。

引理 3.2　方程（3.2）有重根的充要条件为系统（C_0，C_1）满足关系

$$H(C_0,\ C_1)=0。 \tag{3.7}$$

此处

$$当\quad B_2=0,\quad H\equiv C_1^4-4^4\left(\frac{C_0}{3}\right)^3; \tag{3.8}$$

$$当\quad B_2>0,\quad H\equiv C_1^4+\frac{4}{27}(1-36C_0)C_1^2-\frac{16}{27}C_0(1-4C_0)^2; \tag{3.9}$$

$$当\quad B_2<0,\quad H\equiv C_1^4-\frac{4}{27}(1-36C_0)C_1^2-\frac{16}{27}C_0(1-4C_0)^2。 \tag{3.10}$$

证　由 $F(Z)=0$ 及 $F'(Z)=0$ 消去 Z 即得所求。

注：若将（3.6）式代入（3.9）和（3.10），则（3.7）有统一的形式

$$H\equiv\frac{1}{B_2^6}\left[B_1^4+\frac{4}{27}B_1^2B_2(B_2^2-36B_0)-\frac{16}{27}B_0(B_2^2-4B_0)^2\right]。$$

引理 3.3　当 $B_2=0$ 时，方程（3.2）的实根个数在参数（C_0，C_1）平面上分布如下：

1）当 $H<0$ 时，无实根；

2）当 $H>0$ 时，有两实根；

3）当 $H=0$ 时，若 $C_0=0$，有四实根；若 $C_0>0$，则有两实根。

证　当 $B_2=0$ 时，由（3.8）定义的曲线 $H(C_0, C_1)=0$ 是一条高阶抛物线，见图1。在曲线 $H=0$ 上，方程有重根。若 $C_0=0$，则 $C_1=0$，故方程化为 $F(Z)=Z^4=0$，它有四重根；若 $C_0\neq 0$，则 $C_0>0$，方程有两重根。由于 $F''(Z)\geq 0$，所以曲线 $w=F(Z)$ 为上凹型，故当 $H>0$ 时方程只有两实根，而当 $H<0$ 时方程无实根。证毕。

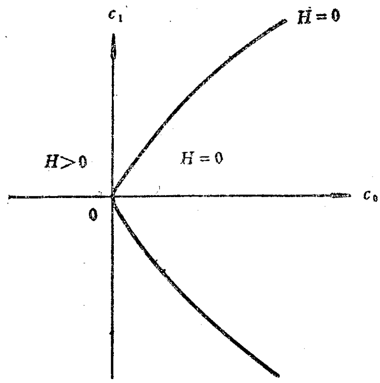

图 1

引理 3.4　当 $B_2>0$ 时，方程（3.2）至多有两实根，在参数（C_0，C_1）平面上其分布如下：

1）当 $H<0$ 时，无实根；

2）当 $H>0$ 时，有两实根；

3）当 $H=0$ 时，若 $C_1=0$，$C_0=\frac{1}{4}$ 则无实根，若 $C_1=0$，$C_0=0$ 或 $C\neq 0$ 则有两实根。

证　当 $B_2>0$ 时，由（3.9）定义的曲线 $H(C_0, C_1)=0$ 是一条高阶抛物线和一个孤立点 $C_1=0$，$C_0=\frac{1}{4}$，见图2。

在孤立点（$\frac{1}{4}$，0）上，方程（3.2）化为

$$F(Z)\equiv Z^4+Z^2+\frac{1}{4}=0,$$

它显然无实根，而在抛物线上方程有两重实根。其他情况与 $B_2=0$ 时相同。证毕。

引理 3.5　当 $B_2<0$ 时，方程（3.2）的实根个数在（C_0，C_1）平面上分布如下：

1）$H<0$ 且 $C_0>\frac{1}{4}$，无实根；

2）$H\leq 0$ 且 $C_0\leq\frac{1}{4}$，四实根；

3）$H>0$　　两实根；

4）$H=0$ 且 $C_0>\frac{1}{4}$，两实根。

证　当 $B_2<0$ 时，由（3.10）知曲线 $H(C_0, C_1)=0$ 的图形见图3。

只需在图3中每一区域内取一点，即可知其实根数。证毕。

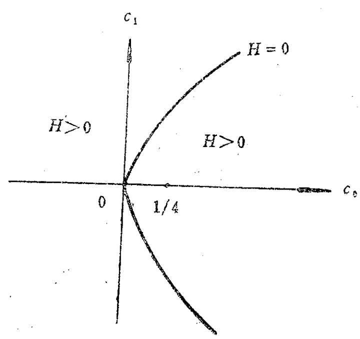

图 2

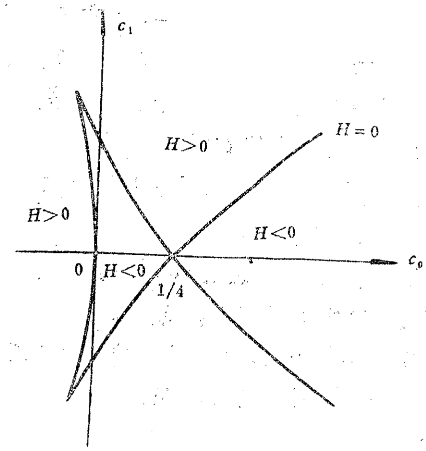

图 3

综合引理3.3—3.5，我们有

引理 3.6 方程(3.2)实根个数的判定条件如下：

(1) 方程无实根当且仅当下列三条件之一成立：

1) $B_2 \geq 0$，$H < 0$； (3.11)

2) $B_2 < 0$，$H < 0$，$C_0 > \frac{1}{4}$； (3.12)

3) $B_2 > 0$，$H = 0$，$C_0 = \frac{1}{4}$，$C_1 = 0$； (3.13)

(2) 方程有四实根当且仅当下列两条件之一成立：

1) $B_2 = 0$，$H = 0$，$C_0 = 0$； (3.14)

2) $B_2 < 0$，$H < 0$，$C_0 \leq \frac{1}{4}$； (3.15)

(3) 方程有两实根当且仅当下列四条件之一成立：

1) $H > 0$； (3.16)

2) $B_2 > 0$，$H = 0$，$C_1 \neq 0$ 或 $C_1 = 0$ 且 $C_0 = 0$； (3.17)

3) $B_2 = 0$，$H = 0$，$C_0 > 0$； (3.18)

4) $B_2 < 0$，$H = 0$，$C_0 > \frac{1}{4}$。 (3.19)

下面考虑在有限区间$[a, b]$内无实根的条件。首先考察在$(-\infty, +\infty)$上有四实根的情况。

引理 3.7 在条件(3.14)下方程(3.2)在$[a, b]$中无实根的条件为$ab > 0$。

证　略。

引理 3.8　在条件（3.15）下方程（3.2）在〔a，b〕中无实根当且仅当下列四条件之一成立：

1）$F(a)F(b)>0$，$F'(a)<0$，$F'(b)<0$，$(a-Z_1'')(b-Z_1'')>0$；

2）$F(a)F(b)>0$，$F'(a)>0$，$F'(b)>0$，$(a-Z_2'')(b-Z_2'')>0$；

3）$F(a)<0$，$F(b)<0$，$F'(a)\leq 0$，$F'(b)\geq 0$，$(a-Z_1'')(b-Z_2'')>0$；

4）$F(a)>0$，$F(b)>0$，$F'(a)\geq 0$，$F'(b)\leq 0$，

此处

$Z_1''\leq Z_2''$　为 $F''(Z)=0$ 之两实根。

证　当 C_0 和 C_1 满足（3.15）时，方程（3.2）有四实根，此时曲线 $w=F(Z)$ 有两次下降两次上升。对两次下降部分利用 Z_1'' 点加以区分，对于两次上升部分则利用 Z_2'' 点加以区分。其余部分均为显然。证毕。

下面考察在（$-\infty$，$+\infty$）上有两实根的情况。

引理 3.9　若 $B_2\geq 0$ 且（3.16）—（3.18）之一满足，则方程（3.2）在〔a，b〕上无实根当且仅当下列两条件之一成立：

1）$F(a)<0$，$F(b)<0$；

2）$F(a)>0$，$F(b)>0$，$F'(a)F'(b)>0$。

证　由于 $B_2\geq 0$，则有 $F''(Z)\geq 0$，曲线 $w=F(Z)$ 为上凹型，见图 4。故可得结论。证毕。

引理 3.10　若 $B_2<0$ 且（3.16）或（3.19）满足，则方程（3.2）在〔a，b〕上无实根当且仅当下列五条件之一成立：

1）$F(a)<0$，$F(b)<0$；

2）$F(a)>0$，$F(b)>0$，$C_1>0$，$F'(a)\geq 0$；

3）$F(a)>0$，$F(b)>0$，$C_1>0$，$F'(a)<0$，
　$(a-Z_1'')(b-Z_1'')>0$；

4）$F(a)>0$，$F(b)>0$，$C_1<0$，$F'(b)\leq 0$；

5）$F(a)>0$，$F(b)>0$，$C_1<0$，$F'(b)>0$，
　$(a-Z_2'')(b-Z_2'')>0$，

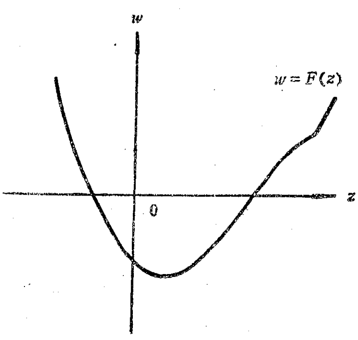

图 4

此处　Z_1'' 和 Z_2'' 同引理 3.8。

证　在引理条件下曲线 $w=F(Z)$ 的图形当 $C_1>0$ 时见图 5，当 $C_1<0$ 时见图 6。其余部分的证明类似于引理 3.8。证毕。

综合引理 3.6—3.10，并回到方程（3.1），即得如下结论。

定理 3.1　方程（3.1）在〔-1，1〕中无实根当且仅当下列十五组条件之一成立。

（1）$B_2\geq 0$，$H<0$；

（2）$B_2<0$，$H<0$，$C_0>\frac{1}{4}$，

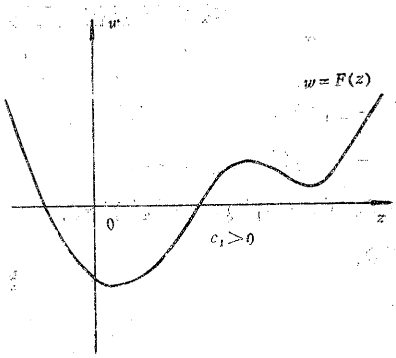

图 5

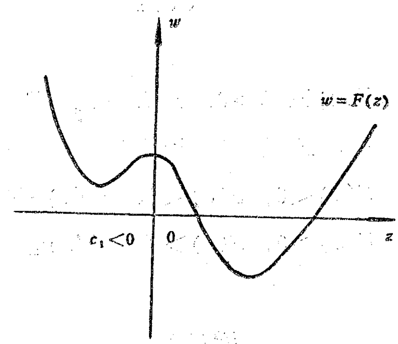

图 6

（3） $B_2>0$，$H=0$，$C_0=\frac{1}{4}$，$C_1=0$，

（4） $B_2=0$，$H=0$，$C_0=0$，$a_4<\frac{1}{4}|a_3|$；

（5） $B_2<0$，$H\leq 0$，$C_0\leq\frac{1}{4}$ 且下列四条件之一成立：

1） $f(-1)f(1)>0$，$f'(-1)<0$，$f'(1)<0$，$|x_1''|>1$；
2） $f(-1)f(1)>0$，$f'(-1)>0$，$f'(1)>0$，$|x_2''|>1$；
3） $f(-1)<0$，$f(1)<0$，$f'(-1)\leq 0$，$f'(1)\geq 0$，$(x_1''+1)(x_2''-1)>0$；
4） $f(-1)>0$，$f(1)>0$，$f'(-1)\geq 0$，$f'(1)\leq 0$；

（6） $B_2\geq 0$，$H\geq 0$ 且下列两条件之一成立：

1） $f(-1)<0$，$f(1)<0$；
2） $f(-1)>0$，$f(1)>0$，$f'(-1)f'(1)>0$；

（7） $B_2<0$，$H>0$，或 $H=0$，$C_0>\frac{1}{4}$且下列条件之一成立：

1） $f(-1)<0$，$f(1)<0$；
2） $f(-1)>0$，$f(1)>0$，$C_1>0$，$f'(-1)\geq 0$；
3） $f(-1)>0$，$f(1)>0$，$C_1>0$，$f'(-1)<0$，$|x_1''|>1$；
4） $f(-1)>0$，$f(1)>0$，$C_1<0$，$f'(1)\leq 0$；
5） $f(-1)>0$，$f(1)>0$，$C_1<0$，$f'(1)>0$，$|x_2''|>1$，

此处

$x_1''\leq x_2''$ 为 $f''(x)=0$ 之两实根。

最后，我们将定理3.1的条件用方程（3.1）的系数明显地表出如下：

定理 3.2 方程（3.1）在〔-1，1〕中无实根当且仅当下列十五组条件之一成立：

（1） $\overline{B}_2\geq 0$，$\overline{H}<0$；

（2） $\overline{B}_2<0$，$\overline{H}<0$，$\overline{B}_0>\overline{B}_2$；

（3） $\overline{B}_2>0$, $\overline{H}=0$, $\overline{B}_0=\overline{B}_2$, $\overline{B}_1=0$;

（4） $\overline{B}_2=0$, $\overline{H}=0$, $\overline{B}_0=0$, $a_4<\frac{1}{4}|a_3|$;

（5） $\overline{B}_2<0$, $\overline{H}\le 0$, $\overline{B}_0\le\overline{B}_2$ 且下列条件之一成立：

1） $|a_0+a_2+a_4|>|a_1+a_3|$, $a_1+3a_3<-2|a_2+2a_4|$, $a_4<\frac{1}{4}\left|a_3+\sqrt{\frac{-\overline{B}_2}{3}}\right|$;

2） $|a_0+a_2+a_4|>|a_1+a_3|$, $a_1+3a_3>2|a_2+2a_4|$, $a_4<\frac{1}{4}\left|-a_3+\sqrt{\frac{-\overline{B}_2}{3}}\right|$;

3） $a_0+a_2+a_4<-|a_1+a_3|$, $a_1+2a_2+3a_3+4a_4\ge 0$,

$a_1+3a_3\le 2(a_2+2a_4)$, $a_4<\frac{1}{12}\left(2a_2+3\sqrt{\frac{-\overline{B}_2}{3}}\right)$;

4） $a_0+a_2+a_4>|a_1+a_3|$, $a_1+2a_2+3a_3+4a_4\le 0$, $a_1+3a_3\ge 2(a_2+2a_4)$;

（6） $\overline{B}_2\ge 0$, $\overline{H}\ge 0$ 且下列条件之一成立：

1） $a_0+a_2+a_4<-|a_1+a_3|$;

2） $a_0+a_2+a_4>|a_1+a_3|$, $|a_1+3a_3|>2|a_2+2a_4|$;

（7） $\overline{B}_2<0$, $\overline{H}>0$ 或 $\overline{H}=0$, $\overline{B}_0>\overline{B}_2$ 且下列条件之一成立：

1） $a_0+a_2+a_4<-|a_1+a_3|$;

2） $a_0+a_2+a_4>|a_1+a_3|$, $\overline{B}_1>0$, $a_1+3a_3\ge 2(a_2+2a_4)$;

3） $a_0+a_2+a_4>|a_1+a_3|$, $\overline{B}_1>0$, $a_1+3a_3<2(a_2+2a_4)$,

$a_4<\frac{1}{4}\left|a_3+\sqrt{\frac{-\overline{B}_2}{3}}\right|$;

4） $a_0+a_2+a_4>|a_1+a_3|$, $\overline{B}_1<0$, $a_1+2a_2+3a_3+4a_4\le 0$;

5） $a_0+a_2+a_4>|a_1+a_3|$, $\overline{B}_1<0$, $a_1+2a_2+3a_3+4a_4>0$,

$a_4<\frac{1}{4}\left|-a_3+\sqrt{\frac{-\overline{B}_2}{3}}\right|$。

此处

$$\overline{B}_2=8a_2a_4-3a_3^2,$$

$$\overline{B}_1=8a_1a_4^2-4a_2a_3a_4+a_3^3,$$

$$\overline{B}_0=256a_0a_4^3-64a_1a_3a_4^2+16a_2a_3^2a_4-3a_3^4,$$

$$\overline{H}=432\overline{B}_1^4+2\overline{B}_1^2\overline{B}_2(\overline{B}_2^2-9\overline{B}_0)-\overline{B}_0(\overline{B}_2^2-\overline{B}_0)^2。$$

四、当$n=2$时系统（1.1）无条件稳定的充要条件

系统（1.1）当$n=2$时可记为

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=a_1x(t)+a_2x(t-\tau)+b_1y(t)+b_2y(t-\tau), \\ \dfrac{dy(t)}{dt}c_1x(t)+c_2x(t-\tau)+d_1y(t)+d_2y(t-\tau), \end{cases} \tag{4.1}$$

其特征方程为

$$\Delta(\lambda,\ \tau)\equiv\begin{vmatrix} a_1+a_2e^{-\lambda\tau}-\lambda & b_1+b_2e^{-\lambda\tau} \\ c_1+c_2e^{-\lambda\tau} & d_1+d_2e^{-\lambda\tau}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{4.2}$$

展开后得

$$\Delta(\lambda,\ \tau)\equiv A_1+A_2e^{-\lambda\tau}+A_3e^{-2\lambda\tau}+A_4\lambda+A_5\lambda e^{-\lambda\tau}+\lambda^2=0, \tag{4.3}$$

此处

$$\left.\begin{array}{l} A_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}, \quad A_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix}, \quad A_3=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \\ A_4=-a_1-d_1, \qquad A_5=-a_2-d_2 。\end{array}\right\} \tag{4.4}$$

由文〔3〕的定理1知，系统（4.1）为无条件稳定的充要条件为下列两条件同时成立：

1） $\Delta(\lambda,\ 0)=0$的所有根的实部均为负；

2） $\Delta(iy,\ \tau)\neq 0$对任何实y及实$\tau>0$均成立。

由方程（4.3），并注意到$\Delta(0,\ \tau)=A_1+A_2+A_3$，则上述两条件可表述如下：

1） $A_1+A_2+A_3>0,\ A_4+A_5>0$； （4.5）

2） $\Delta(iy,\ \tau)\neq 0$对任何实$y\neq 0$及实$\tau>0$均成立。

现以$\lambda=iy$代入（4.3），且令$\omega=-y\tau$，则特征方程（4.3）成为

$$D(y,\ \omega)\equiv A_1+A_2e^{i\omega}+A_3e^{2i\omega}+A_4iy+A_5iye^{i\omega}-y^2=0。 \tag{4.6}$$

将上式记作

$$D(y,\ \omega)\equiv U(y,\ \omega)+iV(y,\ \omega), \tag{4.7}$$

此处

$$U(y,\ \omega)\equiv(A_1+A_2\cos\omega+A_3\cos2\omega)-(A_5\sin\omega)y-y^2, \tag{4.8}$$

$$V(y,\ \omega)\equiv(A_2\sin\omega+A_3\sin2\omega)+(A_4+A_5\cos\omega)y。 \tag{4.9}$$

注意到系统（4.1）的系统都是实数，故y正负成对出现。因$\omega=-\tau y$，故对任何$\omega\neq 0$，均可取得$\tau>0$。因此，上述两条件可写为：

1） （4.5）成立；

2） 对任何实数$y\neq 0$及实数$\omega\neq 0$均有

$$D(y,\ \omega)\equiv U(y,\ \omega)+iV(y,\ \omega)\neq 0,$$

即

$$[U(y, \omega)]^2+[V(y, \omega)]^2\neq 0。\tag{4.10}$$

为导出（4.10）成立的条件，研究联立方程：

$$\begin{cases} U(y, \omega)\equiv(A_1+A_2\cos\omega+A_3\cos 2\omega)-(A_5\sin\omega)y-y^2=0, & (4.11)\\ V(y, \omega)\equiv(A_2\sin\omega+A_3\sin 2\omega)+(A_4+A_5\cos\omega)y=0。 & (4.12)\end{cases}$$

当 $A_4>A_5$ 时，则有 $A_4+A_5\cos\omega\neq 0$，故可由（4.12）解出 y，代入（4.11）得到关于 $\cos\omega$ 的四次方程。记作

$$f(\cos\omega)\equiv a_4\cos^4\omega+a_3\cos^3\omega+a_2\cos^2\omega+a_1\cos\omega+a_0=0,\tag{4.13}$$

此处

$$\left.\begin{aligned} a_4&=4A_3^2,\\ a_3&=2A_3A_4A_5+4A_2A_3,\\ a_2&=2A_3A_4^2+A_2A_4A_5+A_1A_5^2+A_3A_5^2+A_2^2-4A_3^2,\\ a_1&=A_2A_4^2+2A_1A_4A_5+A_2A_5^2-4A_2A_3,\\ a_0&=A_1A_4^2-A_3A_4^2+A_2A_4A_5-A_2^2。\end{aligned}\right\}\tag{4.14}$$

若四次方程（4.13）在 $-1\leq\cos\omega\leq 1$ 中无实根，则对所有实数 ω 和实数 y 均有(4.10）成立。

当 $A_4=A_5$ 时，则对 $\omega=(2k+1)\pi$，（$k=0$，± 1，± 2，……），有 $A_4+A_5\cos\omega=0$ 及 $\sin\omega=0$，故对所有实数 y 均有（4.12）成立。此时，（4.11）成为

$$A_1-A_2+A_3-y^2=0。$$

因此，（4.10）成立的充要条件是 $A_1-A_2+A_3\leq 0$。

当 $A_4<A_5$ 时，则对 $\omega=\cos^{-1}\left(-\dfrac{A_4}{A_5}\right)$，即有

$$A_4+A_5\cos\omega=0,\tag{4.15}$$

且 $\sin\omega\neq 0$，故（4.9）化为

$$V(y, \omega)=\sin\omega(A_2+2A_3\cos\omega)。$$

若 $A_2+2A_3\cos\omega\neq 0$，即 $A_2A_5-2A_3A_4\neq 0$，即有 $V(y, \omega)\neq 0$，则（4.10）成立。

若 $A_2+2A_3\cos\omega=0$，即 $A_2A_5-2A_3A_4=0$，即有 $V(y, \omega)=0$，此时（4.11）成为

$$y^2+(A_5\sin\omega)y-(A_1-A_3)=0。\tag{4.16}$$

方程（4.16）无非零实根的充要条件为

$$A_5^2\sin^2\omega+4(A_1-A_3)<0。\tag{4.17}$$

注意到（4.15），则（4.17）可写为

$$A_5^2-A_4^2+4A_1-4A_3<0。\tag{4.18}$$

总结上述，我们有以下结论。

定理 4.1　系统（4.1）无条件稳定的充要条件为

$A_1+A_2+A_3>0$，$A_4+A_5>0$ 且下列四条件之一成立：

1）$A_4-A_5>0$，$f(x)=0$ 在 $[-1, 1]$ 中无实根；

2）$A_4-A_5=0$，$A_1-A_2+A_3\leq 0$，$f(x)=0$ 在〔-1，1〕中除 $x=-1$ 外无其它实根；

3）$A_4-A_5<0$，$A_2A_5-2A_3A_4\neq 0$，$f(x)=0$ 在〔-1，1〕中除

$$x=-\frac{A_4}{A_5}$$ 外无其它实根；

4）$A_4-A_5<0$，$A_2A_5-2A_3A_4=0$，$A_5{}^2-A_4{}^2+4A_1-4A_3<0$，$f(x)=0$，

在〔-1，1〕中除 $x=-\dfrac{A_4}{A_5}$ 外无其它实根。

此处

$$f(x)=\sum_{j=0}^{4}a_jx^j=0,$$ a_j 由（4.14）确定。

A_i（$i=1$，2，…，5）由（4.4）确定。

最后，由定理 4.1 并结合定理 2.1 及定理 3.2，这就完整地回答了 A.A.Андронов 所提出的问题。

参考文献

〔1〕 Андронов, А.А. и Майер, А.Г., Автоматика и Телемеханика. **7**, 2—3（1946），95—106.

〔2〕 秦元勋，有时滞的系统的无条件稳定性，数学学报，**10**，1（1960），125—141.

〔3〕 秦元勋、刘永清、王联，带有时滞的动力系统的运动稳定性，科学出版社（1963），第六章。

〔4〕 Ku, W.H., IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**10**（1965），372—373.

〔5〕 Jury, E.I., Inners and Stability of dynamic Systems, New York, Wiley（1974），第三章。

UNCONDITIONAL STABILITY CONDITIONS FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH TIME DELAY

Qin Yuanxun   Yu Yuanhong
(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, necessary and sufficient conditions for unconditional stability with respect to all delay τ for the following system

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1x(t) + a_2x(t-\tau) + b_1y(t) + b_2y(t-\tau),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = C_1x(t) + C_2x(t-\tau) + d_1y(t) + d_2y(t-\tau),$$

are given. This problem was proposed by A. A. Андронов[1] in 1946. Preliminary results[2] were given by us in 1960, and are given in explicit forms in this paper. The results depend on the nonexistence of real roots of a fourth order algebraic equation within an interval[−1, 1], and are given explicitly in order to faciliate their use by engineers.