第1卷 创刊号 控制理论与应用 Vol. 1, Initial Issue
1984年1月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS January, 1984

非线性时变离散大系统的稳定性

刘永清 王慕秋 王 联
（华南工学院） （中国科学院数学研究所）

摘 要

本文应用标量李雅普诺夫函数法研究了线性时变离散大系统及非线性时变离散大系统的稳定性分解。同时分别给出了分解系数与稳定域的参数估计公式。

在〔1〕中用标量李雅普诺夫函数法研究了定常离散线性大系统的稳定性分解。而在1981年王慕秋、刘永清、王联[2]用向量李雅普诺夫函数法进一步给出了定常离散线性大系统在稳定性中明显的分解公式。

本文是〔1〕、〔2〕的进一步发展，采用标量李雅普诺夫函数法研究了时变离散线性大系统与非线性时变离散大系统的稳定性及不稳定性分解。同时给出了分解系数及稳定域的参数估计公式。

一、$n=2$时线性时变离散系统的稳定性

今考虑线性时变离散系统

$$\begin{cases} X_1(K+1)=a_{11}(K)X_1(K)+a_{12}(K)X_2(K), \\ X_2(K+1)=a_{21}(K)X_1(K)+a_{22}(K)X_2(K), \end{cases} \tag{1.1}$$

与其孤立子系统

$$\begin{cases} X_1(K+1)=a_{11}(K)X_1(K) \quad , \\ X_2(K+1)=a_{22}(K)X_2(K) \quad 。 \end{cases} \tag{1.2}$$

设 $a=\max\limits_{K=0,1,\cdots}[|a_{ij}(K)|,\ i,j=1,2.]$, $E=\max\limits_{K=0,1,\cdots}[|a_{ij}(K)|, i,j$

$$=1,2.\ i\neq j], \tag{1.3}$$

$$a_{ii}^2(K)+\alpha_i\leq 1 \qquad (\alpha_i>0,\quad i=1,2,\quad \forall K=0,1,\cdots,\infty)\ 。 \tag{1.4}$$

令 $V_1=X_1^2(K)$, $V_2=X_2^2(K)$ 分别为（1.2）的李雅普诺夫函数，对（1.2）求增量，并应用（1.4）式有

$$\Delta V_1|_{(1.2)}=V_1(X_1(K+1))-V_1(X_1(K))=X_1^2(K+1)-X_1^2(K)$$
$$=a_{11}^2(K)X_1^2(K)-X_1^2(K)=(a_{11}^2(K)-1)X_1^2(K)\leq-\alpha_1X_1^2(K)<0。$$

本文于1982年12月9日收到。

同理

$$\Delta V_2|_{(1.2)}=(a_{22}^2(K)-1)\ X_2^2(K)\leq-\alpha_2\ X_2^2(K)<0,$$

得到子系统（1.2）的零解是渐近稳定的。

令 $V=V_1(X_1(K))+V_2(X_2(K))=X_1{}^2(K)+X_2{}^2(X)$ 为（1.1）的李雅普诺夫函数，对（1.1）求增量

$$\begin{aligned}\Delta V|_{(1.1)}=&\ \Delta V_1+\Delta V_2=(X_1{}^2(K+1)-X_1{}^2(K))+(X_2{}^2(K+1)-X_2{}^2(K))\\&=[a_{11}(K)X_1(K)+a_{12}(K)X_2(K)]^2-X_1{}^2(K)+[a_{21}(K)X_1(K)\\&+a_{22}(K)X_2(K)]^2-X_2^2(K)\leq-(1-a_{11}^2(K))X_1^2(K)\\&+2|a_{11}(K)\|a_{12}(K)\|X_1(K)\|X_2(K)|+a_{12}^2(K)X_2^2(K)\\&-(1-a_{22}^2(K))X_2^2(K)+2|a_{21}(K)\|a_{22}(K)\|X_1(K)\|X_2(K)|\\&+a_{21}^2(K)X_1^2(K)\leq-\alpha_1\ X_1^2(K)-\alpha_2\ X_2^2(K)+E_1a\ (X_1^2(K)+X_2^2(K))\\&+E_1\ aX_2^2(K)+E_1aX_1^2(K)+E_1a(X_1^2(K)+X_2^2(K))\\&\leq(-\alpha_1+3E_1a)X_1^2(K)+(-\alpha_2+3E_1a)\ X_2^2(K)<0\ 。\end{aligned}\qquad(1.5)$$

当

$$E_1<\Delta_1=\min\left[\frac{\alpha_1}{6a},\ \frac{\alpha_2}{6a}\right]\qquad(1.6)$$

成立时，从而得到

定理 1　设（1.1）的系数有界，条件（1.3）及（1.4）成立，即子系统（1.2）的零解是渐近稳定的，存在 $\Delta_1>0$，使当 $E_1<\Delta_1$ 成立时，则得到线性时变离散系统（1.1）的零解也是渐近稳定的。

如果以条件

$$a_{ii}^2(K)\geq1+\alpha_i>0\qquad(\alpha_i>0,\ i=1,2;\ \forall K=0,1,\cdots,\infty)\qquad(1.7)$$

代替（1.4）式中的 $a_{ii}^2(K)+\alpha_i\leq1$，得到离散子系统（1.2）的零解是不稳定的。与同定理 1 的类似计算可得

$$\begin{aligned}\Delta V\ |_{(1.1)}\geq&\ [a_{11}^2(K)-1]X_1^2(K)+[a_{22}^2(K)-1]X_2^2(K)-3E_1a[X_1^2(K)+X_2^2(K)]\\&\geq(\alpha_1-3E_1a)X_1{}^2(K)+(\alpha_2-3E_1a)X_2{}^2(K)>0。\end{aligned}\qquad(1.8)$$

当 $E_1<\Delta_1$ 成立时，从而得到

定理 2　如果条件（1.3）及（1.7）成立，即子系统（1.2）的零解是不稳定的，存在 $\Delta_1>0$，使当 $E_1<\Delta_1$ 成立时，则得到线性时变离散系统（1.1）的零解也是不稳定的。

二、一般线性时变离散大系统的稳定性

今考虑一般线性时变离散大系统

$$X_i(K+1)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2.1}$$

与其孤立子系统

$$X_i(K+1)=a_{ii}(K)X(_iK)\quad(i=1,2,\cdots,n)。\tag{2.2}$$

设系统（2.1）的系数 $a_{ij}(K)$ 有界

$$|a_{ij}(K)|\le a\quad(i,j=1,2,\cdots n,\quad \forall K=0,1,\cdots,\infty)。\tag{2.3}$$

令

$$E_2=\max_{K=0,1,\cdots}[\,|a_{ij}(K)|,\ i,j=1,2,\cdots,n,\ i\ne j],\tag{2.4}$$

且有

$$a_{ii}^2(K)+\alpha_i\le 1\quad(\alpha_i>0.\ \ i=1,2,\cdots,n,\ \ \forall K=0,1,\cdots,\infty)\tag{2.5}$$

做子系统的正定函数 $Vn_i(X_i(K))=X_i^2(K)$ （$i=0,1,\cdots,n$）。

由 Vn_i 对（2.2）求增量

$$\Delta Vn_i|_{(2.2)}=Vn_i(X_i(K+1))-Vn_i(X_i(K))=X_i^2(K+1)-X_i^2(K)=a_{ii}^2(K)X_i^2(K)$$

$$-X_i^2(K)=-(1-a_{ii}^2(K))X_i^2(K)\le-\alpha_iX_i^2(K)<0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

即得到子系统（2.2）的零解是渐近稳定的。

令

$$V=\sum_{i=1}^{n}Vn_i(X_i(K))=\sum_{i=1}^{n}X_i^2(K)\tag{2.6}$$

为（2.2）的正定函数。由V对（2.1）求增量

$$\Delta V\Big|_{(2,1)}=\sum_{i=1}^{n}\Big[X_i^2(K+1)-X_i^2(K)\Big]=\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\Big]^2$$

$$-\sum_{i=1}^{n}X_i^2(K)。\tag{2.7}$$

由

$$[a_{i1}(K)X_1(K)+\cdots+a_{ii}(K)X_i(K)+\cdots+a_{in}(K)X_n(K)]^2\le a_{ii}^2(K)X_i^2(K)$$

$$+E_2an\sum_{i=1}^{n}X_i^2(K),\tag{2.8}$$

将（2.8）代入（2.7）中得到

$$\Delta V\Big|_{(2\cdot1)} \leq \sum_{i=1}^{n}\left[a_{ii}^{2}(K)-1\right]X_i^2(K)+E_2 a n^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2(K)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left[-\alpha_i+E_2 a n^2\right]X_i^2(K)<0。$$

当 $$E_2<\Delta_2=\min\left[\frac{\alpha_i}{2an^2},\quad i=1,2,\cdots,n\right] \tag{2.9}$$

成立时，得到

定理 3　设（2.1）的系数有界，条件（2.3），（2.5）成立，即子系统（2.2）的零解是渐近稳定的，存在$\Delta_2>0$，使当$E_2<\Delta_2$时，则得到时变离散线性系统（2.1）的零解也是渐近稳定的。

若

$$a_{ii}^2(K)\geq 1+\alpha_i>0\quad(\alpha_i>0,\quad i=1,2,\cdots,n\quad \forall K=0,1,\cdots), \tag{2.10}$$

即子系统（2.2）的零解是不稳定的。同理得

$$\Delta V\Big|_{(2\cdot1)} \geq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i^2(K)-E_2 a n^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2(K)>0。 \tag{2.11}$$

当　$E_2<\Delta_2$成立时，因而得到

定理 4　设系统（2.1）的系数有界，（2.3）、（2.10）成立，即子系统（2.2）的零解是不稳定的，存在$\Delta_2>0$，使当$E_2<\Delta_2$时，得到线性时变离散大系统（2.1）的零解也是不稳定的。

今设（2.1）按主对角线分解为m个孤立子系统

$$\begin{pmatrix} x_1(K+1)\\ x_2(K+1)\\ \vdots\\ x_m(K+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} An_1(K) & & & \mathbf{0}\\ & An_2(K) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & An_m(K)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(K)\\ x_2(K)\\ \vdots\\ x_m(K)\end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

或记为

$$x_r(K+1)=An_\gamma(K)x_\gamma(K)\qquad(r=1,2,\cdots m,)。 \tag{2.12}$$

$x_\gamma(K)=[Xn_{1+\cdots+n_{\gamma-1}+1}(K),\cdots,Xn_{1+\cdots+n_\gamma}(K)]^T$ $(\gamma=1,2,,\cdots m,n_1+n_2+\cdots+n_m=n)$。$An_\gamma(K)$ 为$n_\gamma\times n_\gamma$维时变实矩阵。取（2.12）的正定函数为：

$$Vn_r(xn_r(K))=x_{nr}^T(K)x_{n_r}(K)=\sum_{i=n+\cdots+n_{\gamma-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\gamma}X_i^2(K),\quad r=1,2,\cdots,m。 \tag{2.13}$$

由 Vn_r 对（2.12）求增量

$$\Delta Vn_r\Big|_{(2.12)}=\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_i^2(K+1)-\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_i^2(K)$$

$$=\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}\left[\sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2$$

$$-\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_i^2(K)\le a^2n_r^2\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_i^2(K)$$

$$-\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_i^2(K)\qquad(r=1,2,\cdots,m)。\qquad(2.14)$$

设

$$a^2n_r^2+\alpha_r\le 1\quad(\alpha_r>0,\ r=1,2,\cdots m)。\qquad(2.15)$$

若条件（2.15）成立，则有

$$\Delta Vn_r\Big|_{(2.12)}\le-\alpha_r\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_i^2(K)<0。$$

得到线性时变离散子系统（2.12）的零解是渐近稳定的。令

$$E_3=\max_{K=0,1,\cdots}\left\{|a_{ij}(K)|,\ \begin{matrix}i=1,2,\cdots,n_1\\ \\ j-n_1+1,\cdots,n\end{matrix};\ \begin{matrix}i=n_1+1,\cdots,n_1+n_2\\ j=1,2,\cdots,n_1\\ j=n_1+n_2+1,\cdots,n\end{matrix};\right.$$

$$\left.\cdots;\ \begin{matrix}i=n-n_m+1,\cdots,n\\ \\ j=1,2,\cdots,n-n_m\end{matrix}\right\}。\qquad(2.16)$$

由（2.6）表示的V作为（2.1）的正定函数，由V对（2.1）求增量

$$\Delta V\Big|_{(2.1)}=\sum_{r=1}^{m}\left\{\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_i^2(K+1)-\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_i^2(K)\right\}$$

$$=\sum_{r=1}^{m}\left\{\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(K)\,X_j(K)\right]^2\right\}-$$

$$-\sum_{r=1}^{m}\left[\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} X_i^2(K)\right]=\sum_{i=1}^{n_1}\left[\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}(K)X_j(K)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=n_1+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2+\cdots+\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}\left[\sum_{j=1}^{n_1+\cdots+n_{r-1}}a_{ij}(K)X_j(K)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}a_{ij}(K)X_j(K)+\sum_{j=n_1+\cdots+n_r+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2$$

$$+\cdots+\sum_{i=n-n_m+1}^{n}\left[\sum_{j=n-n_m+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)+\sum_{j=1}^{n_1-n_m}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2$$

$$-\sum_{r=1}^{m}\left[\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} X_i^2(K)\right]。\tag{2.17}$$

以下分别估计（2.17）

$$\sum_{i=1}^{n_1}\left[\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}(K)X_j(K)+\sum_{j=n_1+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\left\{\left[\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2+2\left[\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}(K)X_j(K)\right]\left[\sum_{j=n_1+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{j=n_1+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2\right\}\le n_1\left\{a^2n_1\sum_{j=1}^{n_1}X_j^2(K)\right.$$

$$+E_3a\left[(n-n_1)\sum_{j=1}^{n_1}X_j^2(K)+n_1\sum_{j=n_1+1}^{n}X_j^2(K)\right]$$

$$\left.+aE_3(n-n_1)\sum_{j=n_1+1}^{n}X_j^2(K)\right\}\le a^2n_1^2\sum_{j=1}^{n_1}X_j^2(K)$$

$$+E_3a\left[nn_1\sum_{j=1}^{n}X_j^2(K)-n_1^2\sum_{j=1}^{n_1}X_j^2(K)\right]。\tag{2.18}$$

$$\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\left[\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}(K)X_j(K)+\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}a_{ij}(K)X_j(K)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=n_1+n_2+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2=\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\left\{\left[\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2\right.$$

$$+\left[\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2+\left[\sum_{j=n_1+n_2+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2$$

$$+2\left[\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}(K)X_j(K)\right]\left[\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}a_{ij}(K)X_j(K)+\sum_{j=n_1+n_2+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]$$

$$\left.+2\left[\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}a_{ij}(K)X_j(K)\right]\left[\sum_{j=n_1+n_2+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]\right\}$$

$$\leq n_2\left\{n_2a^2\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}X_j^2(K)+n_1aE_3\sum_{j=1}^{n_1}X_j^2(K)+E_3a(n-n_1\right.$$

$$-n_2)\sum_{j=n_1+n_2+1}^{n}X_j^2(K)+E_3a\left[n_2\sum_{j=1}^{n_1}X_j^2(K)+(n-n_1-n_2)\sum_{j=1}^{n_1}X_j^2(K)\right.$$

$$\left.+n_1\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}X_j^2(K)+n_1\sum_{j=n_1+n_2+1}^{n}X_j^2(K)\right]+E_3a\left[(n-n_1\right.$$

$$\left.\left.-n_2)\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}X_j^2(K)+n_2\sum_{j=n_1+n_2+1}^{n}X_j^2\right]\right\}=n_2^2a^2\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}X_j^2(K)$$

$$+nn_2E_3a\sum_{j=1}^{n}X_j^2(K)-E_3an_2^2\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}X_j^2(K)。\tag{2.19}$$

同理得到

$$\sum_{i=n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\gamma}\left[\sum_{j=1}^{n_1+\cdots n_{\gamma-1}}a(K_{ij})X_j(K)+\sum_{j=n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\gamma}a_{ij}(K)X_j(K)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=n_1+\cdots+n_\gamma+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2\leq$$

$$\leq n_\gamma^2 a^2 \sum_{j=n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\gamma} X_j^2(K) + nn_\gamma E_3 a \sum_{j=1}^{n} X_j^2(K) - E_3 a n_\gamma^2 \sum_{j=n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\gamma} X_j^2(K); \tag{2.20}$$

$$\sum_{i=n-n_m+1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n-n_m} a_{ij}(K)X_j(K) + \sum_{j=n-n_m+1}^{n} a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2$$

$$\leq n_m^2 a^2 \sum_{i=n-n_m+1}^{n} X_i^2(K) + E_3 nn_m a \sum_{j=1}^{n} X_j^2(K) - E_3 a n_m^2 \sum_{j=n-n_m+1}^{n} X_j^2(K)。\tag{2.21}$$

将(2.18)—(2.21)分别代入(2.17)中，得到

$$\Delta V\Big|_{(2.1)} \leq -\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\gamma}(1-a^2 n_\gamma^2)X_j^2(K) + E_3 a\left[nn_1\sum_{j=1}^{n} X_j^2(K) - n_1^2\sum_{j=1}^{n_1} X_j^2(K)\right] + \cdots + E_3 a\left[nn_\gamma \sum_{j=1}^{n} X_j^2(K) - n_\gamma^2 \sum_{j=n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\gamma} X_j^2(K)\right]$$

$$+\cdots+E_3 a\left[nn_m \sum_{j=1}^{n} X_j^2(K) - n_m^2 \sum_{j=n-n_m+1}^{n} X_j^2(K)\right]$$

$$\leq (-\alpha_1 + E_3 a n^2 - E_3 a n_1^2)\sum_{j=1}^{n_1} X_j^2(K) + \cdots + (-\alpha_\gamma + n^2 E_3 a - n_\gamma^2 E_3 a)\sum_{j=n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\gamma} X_j^2(K)$$

$$+\cdots+(-\alpha_m + E_3 a n^2 - E_3 a n_m^2)\sum_{j=n-n_m+1}^{n} X_j^2(K) < 0。$$

当 $$E_3 < \Delta_3 = \min\left[\frac{\alpha_\gamma}{2a(n^2-n_\gamma^2)},\ r=1,2,\cdots,m\right] \tag{2.22}$$

成立时，得到

定理 5 设(2.1)的系数有界，(2.3)，(2.15)成立，即线性时变离散子系统(2.12)的零解是渐近稳定的，存在$\Delta_3>0$，使当

$$E_3 < \Delta_3$$

时，则得到线性时变离散大系统(2.1)的零解也是渐近稳定的。

若 $a^2 n_\gamma^2 \geq 1 + a_\gamma > 0$ ($\alpha_\gamma > 0$, $r=1,2,\cdots,m$)， (2.23)

即线性时变离散子系统(2.12)的零解是不稳定的。

同理可得，当 $E_3 < \Delta_3$时有

$$\Delta V\Big|_{(2.1)} \geq \sum_{r=1}^{m}(\alpha_r - n^2E_3a + n_\gamma{}^2E_3a)\sum_{j=n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\gamma} X_j{}^2(K) > 0。$$

定理 6　设（2.1）的系数有界，条件（2.3）、（2.23）成立，即线性时变离散子系统（2.12）的零解是不稳定的，存在$\Delta_3>0$，使当

$$E_3<\Delta_3$$

时，则得到线性时变离散大系统（2.1）的零解也是不稳定的。

三、$n=2$时非线性时变离散系统的稳定性

今考虑非线性时变离散系统

$$\begin{cases} X_1(K+1)=a_{11}(K)X_1(K)+a_{12}(K)X_2(K)+f_1(K,X_1(K),X_2(K)), \\ X_2(K+1)=a_{21}(K)X_1(K)+a_{22}(K)X_2(K)+f_2(K,X_1(K),X_2(K))。\end{cases} \quad (3.1)$$

设在域　$D:|X_i(K)|\leq H$（$i=1,2$，$\forall K=0,1,\cdots,\infty$）上满足不等式

$$|f_i(K,X_1(K),X_2(K))|\leq\eta[|X_1(K)|+|X_2(K)|],\ (i=1,2), \quad (3.2)$$

其中　η是与K无关的正常量，并设f_i有保证解的存在唯一性条件。

取　$V=V_1(X_1(K))+V_2(X_2(K))=X_1{}^2(K)+X_2{}^2(K)$为(3.1)的正定函数，由$V$对（3.1）求增量

$$\begin{aligned}\Delta V|_{(3.1)}&=X_1{}^2(K+1)-X_1{}^2(K)+X_2{}^2(K+1)-X_2(K)=[a_{11}(K)X_1(K)\\&+a_{12}(K)X_2(K)+f_1(K,X_1(K),X_2(K))]^2-X_1{}^2(K)+[a_{21}(K)X_1(K)\\&+a_{22}(K)X_2(K)+f_2(K,X_1(K),X_2(K))]^2-X_2{}^2(K)。\end{aligned}$$

应用（1.5）式得到

$$\begin{aligned}\Delta V|_{(3.1)}&\leq-\alpha_1X_1{}^2(K)-\alpha_2X_2{}^2(K)+3E_1a[X_1{}^2(K)+X_2{}^2(K)]+2|[a_{11}(K)X_1(K)\\&+a_{12}(K)X_2(K)]f_1(K,X_1(K),X_2(K))|\\&+[f_1(K,X_1(K),X_2(K))]^2+2|[a_{21}(K)X_1(K)\\&+a_{22}(K)X_2(K)]f_2(K,X_1(K),X_2(K))|+[f_2(K,X_1(K),X_2(K))]^2。\end{aligned} \quad (3.3)$$

对

$$\begin{aligned}&2|[a_{11}(K)X_1(K)+a_{12}(K)X_2(K)]f_1(K,X_1(K),X_2(K))|\leq2[|a_{11}(K)||X_1(K)|\\&+|a_{12}(K)||X_2(K)|]|f_1(K,X_1(K),X_2(K))|\leq2a\eta[|X_1(K)|+|X_2(K)|]^2\\&\leq4a\eta[X_1{}^2(K)+X_2{}^2(K)]。\end{aligned} \quad (3.4)$$

同理应用条件（3.2），对

$$|f_1(K,X_1(K),X_2(K))|^2\leq\eta a[|X_1(K)|+|X_2(K)|]^2\leq2a\eta[X_1{}^2(K)+X_2{}^2(K)] \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}&2|[a_{21}(K)X_1(K)+a_{22}(K)X_2(K)]f_2(K,X_1(K),X_2(K))|\leq4a\eta[X_1{}^2(K)\\&+X_2{}^2(K)],\end{aligned} \quad (3.6)$$

$$|f_2(K,X_1(K),X_2(K))|^2\leq2a\eta[X_1{}^2(K)+X_2{}^2(K)]。 \quad (3.7)$$

将（3.4）—（3.7）代入（3.3）中，得到

$$\Delta V|_{(3.1)}\le(-\alpha_1+3E_1a+12a\eta)X_1^2(K)+(-\alpha_2+3E_1a+12a\eta)X_2^2(K). \tag{3.8}$$

令 $$\Delta_4=\min\left[\frac{\alpha_1}{24a},\ \frac{\alpha_2}{24a}\right]。 \tag{3.9}$$

当　　$E_1<\Delta_1$，$\eta<\Delta_4$时，有$\Delta V|_{(3.1)}<0$，从而得到

定理 7　设（3.1）的系数有界

$$a=\max_{K=0,1,\cdots}[\eta,\ |a_{ij}(K)|,\ i,j=1,2] \tag{3.10}$$

及条件(1.4)成立，即线性时变离散子系统(1.2)的零解是渐近稳定的，并设系统(3.1)的非线性项满足条件（3.2），存在$\Delta_1>0$，$\Delta_4>0$，使当

$$E_1<\Delta_1,\ \eta<\Delta_4 \tag{3.11}$$

时，则得到非线性时变离散系统（3.1）的零解也是渐近稳定的。

如果条件（1.7）成立，得到线性时变离散子系统（1.2）的零解是不稳定的。

如同定理 7 的计算得到

$$\Delta V|_{(3.1)}\ge(\alpha_1-3E_1a-12a\eta)X_1^2(K)+(\alpha_2-3E_1a-12a\eta)X_2^2(K)>0。$$

当 $E_1<\Delta_1$，$\eta<\Delta_4$成立时，从而得到

定理 8　设系统（3.1）的系数满足条件，（3.10）、（1.7）成立，即线性时变离散子系统（1.2）的零解是不稳定的，并设系统（3.1）的非线性 项满足 条件（3.2），存在$\Delta_1>0$，$\Delta_4>0$，使当

$$E_1<\Delta_1,\ \eta<\Delta_4$$

时，则非线性时变离散系统（3.1）的零解也是不稳定的。

四、一般非线性时变离散大系统的稳定性

今考虑非线性时变离散大系统

$$X_i(K+1)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)+f_i(K,X_1(K),\cdots,X_n(K))\ (i=1,2,\cdots,n,\ \forall K=0,1,\cdots)。 \tag{4.1}$$

设在域 G: $|X_i(K)|\le H(i=1,2,\cdots,\ n,\ \forall K=0,1,\cdots)$ 中满足不等式

$$|f_i(K,X_1(K),\cdots,X_n(K))|\le\eta\sum_{j=1}^{n}|X_j(K)|,\quad(i=1,2,\cdots,n), \tag{4.2}$$

其中 η 是与 K 无关的正常数，并设 f_i 有保证（4.1）解存在唯一性条件。令

$$a=\max_{K=0,1,\cdots}[\eta,\ |a_{ij}(K)|,\ i,j=1,2,\cdots,n]。 \tag{4.3}$$

取由（2.6）式表示的V为（4.1）的正定函数，由V对（4.1）求增量

$$\Delta V\Big|_{(4.1)}=\sum_{j=1}^{n}[X_i^2(K+1)-X_i^2(K)]=\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(K)X_j$$

$$+f_i(K,X_1(K),\cdots,X_n(K))\Big]^2-\sum_{i=1}^{n}X_i^2(K)\le\sum_{i=1}^{n}\Big\{\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\Big]^2$$

$$+2\Big|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)f_i(K,X_1(K),\cdots,X_n(K))\Big|+|f_i(K,X_1(K),\cdots,X_n(K))|^2\Big\}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}X_i^2(K)。\qquad(4.4)$$

应用条件（4.2），类似（3.5）—（3.7）的计算得到

$$2\Big|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)f_i(K,X_1(K),\cdots,X_n(K))\Big|\le 2an\eta\sum_{j=1}^{n}X_j^2(K),\qquad(4.5)$$

$$|f_i(K,X_1(K),\cdots,X_n(K))|^2\le na\eta\sum_{j=1}^{n}X_j^2(K)。\qquad(4.6)$$

将（2.8）、（4.5）、（4.6）分别代入（4.4）中，得到

$$\Delta V\Big|_{(4.1)}\le\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}^2(K)-1]X_i^2(K)+E_2an^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2(K)+3n^2a\eta\sum_{i=1}^{n}X_i^2(K)$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}[-\alpha_i+E_2an^2+3\eta n^2a]X_i^2(K)。\qquad(4.7)$$

令 $$\Delta_5=\min\Big[\frac{\alpha_i}{6n^2a},\ i=1,\cdots,n\Big]。\qquad(4.8)$$

当 $E_2<\Delta_2$，$\eta<\Delta_5$时有$\Delta V|_{(4.1)}<0$，从而得到

定理 9 设系统（4.1）的系数有界，条件（4.2）、（4.3）及（2.5）成立，即线性时变离散子系统（2.2）的零解是渐近稳定的，并设系统（4.1）的非线性项满足条件（4.2），存在$\Delta_2>0$，$\Delta_5>0$，使当

$$E_2<\Delta_2,\ \eta<\Delta_5\qquad(4.9)$$

时，则非线性时变离散大系统（4.1）的零解也是渐近稳定的。

若条件（2.10）成立，即子系统（2.2）的零解是不稳定的。

类似定理 9 的计算得到

$$\Delta V\Big|_{(4.1)} \geq \sum_{i=1}^{n} [a_i - E_2 an^2 - 3\eta n^2 a] X_i^2(K) > 0。 \tag{4.10}$$

当 $E_2 < \Delta_2$，$\eta < \Delta_5$成立时，从而得到

定理10 设系统（4.1）的系数有界，条件（4.3）及（2.10）成立，即线性时变离散子系统（2.2）的零解是不稳定的，并设系统（4.1）的非线性项满足条件（4.2），存在$\Delta_2 > 0$，$\Delta_5 > 0$，使当$E_2 < \Delta_2$，$\eta < \Delta_5$时，则非线性时变离散大系统（4.1）的零解也是不稳定的。

今设（2.12）为（4.1）的子系统。由（2.6）表示的V作为（4.1）的正定函数，由V对（4.1）求增量

$$\Delta V\Big|_{(4.1)} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} X_i^2(K+1) - \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} X_i^2(K)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(K) X_j(K) + f_i(K, X_1(K), \cdots, X_n(K)) \right]^2 + \cdots$$

$$+ \sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(K) X_j(K) + f_i(K, X_1(K), \cdots, X_n(K)) \right]^2 + \cdots$$

$$+ \sum_{i=n-n_m+1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(K) X_j(K) + f_i(K, X_1(K), \cdots, X_n(K)) \right]^2$$

$$- \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} X_i^2(K) \leq \sum_{i=1}^{n_1} \Bigg\{ \Bigg[\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}(K) X_j(K)$$

$$+ \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(K) X_j(K) \Bigg]^2 + 2 \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(K) X_j(K) \cdot f_i(K, X_1(K), \cdots, X_n(K)) \right|$$

$$+ \left[f_i(K, X_1(K), \cdots, X_n(K)) \right]^2 \Bigg\} + \cdots + \sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} \Bigg\{ \Bigg[\sum_{j=1}^{n_1+\cdots+n_{r-1}} a_{ij}(K) X_j(K)$$

$$+ \sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} a_{ij}(K) X_j(K) + \sum_{j=n_1+\cdots+n_{r+1}+1}^{n} a_{ij}(K) X_j(K) \Bigg]^2$$

$$+ 2 \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(K) X_j(K) \cdot f_i(K, X_1(K), \cdots, X_n(K)) \right| + [f_i(K, X_1(K), \cdots, X_n(K))]^2 \Bigg\} +$$

$$+\cdots+\sum_{i=n-n_m+1}^{n}\left\{\left[\sum_{j=1}^{n-n_m}a_{ij}(K)X_j(K)+\sum_{j=n-n_m+1}^{n}a_{ij}(K)X_j(K)\right]^2\right.$$

$$\left.+\left|2\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(K)X_{ji}(K)\cdot f(K,X_1(K),\cdots,X_n(K))\right|+[f_i(K,X_1(K),\cdots,X_n(K))]^2\right\}$$

$$-\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_i^2(K)。\tag{4.11}$$

应用（2.18）—（2.21）及（4.5）、（4.6）式代入（4.11）中，得到

$$\Delta V\Big|_{(4.1)}\leq[-\alpha_1+E_3an^2-E_3an_1^2+3\eta n^2a]\sum_{j=1}^{n_1}X_j^2(K)+\cdots+[-\alpha+n_r^2aE_3$$

$$-n_r^2aE_3+3n^2a\eta]\sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_j^2(K)+\cdots+[-\alpha_m+E_3an^2-E_3an_m^2+3n^2a\eta]$$

$$\cdot\sum_{j=n-n_m+1}^{n}X_j^2(K)<0。$$

当 $E_3<\Delta_3$，$\eta<\Delta_6=\min\left[\dfrac{\alpha_r}{6n^2a},\ r=1,2,\cdots,m\right]$ （4.12）

成立时，得到

定理11 设系统（4.1）的系数有界，条件（4.3）、（2.5）成立，即线性时变离散子系统（2.12）的零解是渐近稳定的，并设系统（4.1）的非线性项满足条件(4.2)，存在$\Delta_3>0$，$\Delta_6>0$，使当

$$E_3<\Delta_3,\ \eta<\Delta_6$$

时，则非线性时变离散大系统（4.1）的零解也是渐近稳定的。

若条件（2.23）成立，得到线性时变离散子系统（2.12）的零解是不稳定的。

同理可得当 $E_3<\Delta_3$，$\eta<\Delta_6$ 时有

$$\Delta V\Big|_{(4.1)}\geq\sum_{r=1}^{m}[\alpha_r-E_3an^2+E_3an_r^2-3\eta n^2a]\sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_j^2(K)>0$$

成立，则得到

定理12 设系统（4.1）的系数有界，条件（4.2）、（4.3）、（2.23）成立，即线性时变离散子系统（2.12）的零解是不稳定的，并设系统（4.1）的非线性项满足条件（4.2），存在$\Delta_3>0$，$\Delta_6>0$，使当

$$E_3<\Delta_3,\ \eta<\Delta_6$$

时，则非线性时变离散大系统（4.1）的零解也是不稳定的。

根据具体方程，以上估值还可以更精确一些。

参 考 文 献

〔1〕 刘永清，大系统在稳定性理论中的分解问题(5)，数学研究与评论，2，2（1982），41—48.

〔2〕 王慕秋、刘永清、王联，分解理论在线性迭代系统中的应用，数学研究与评论，2，3（1982），33—40.

THE STABILITY OF THE NONLINEAR TIME-VARYING DISCRETE LARGE-SCALE SYSTEM

Liu Yongqing
(South China Institute of Technology, Guangzhou)

Wang Muqiu　Wang Lian
(Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

By the method of Liapunov function of scalar sum, this paper studies the decompositions of stability of the linear time-varying discrete large-scale system and the nonlinear time-varying discrete large-scale system. At the same time the decomposition coefficients and the parametric estimate formulae of stable region are given.