第1卷 创刊号　　控制理论与应用　　Vol. 1, Initial Issue
1984年1月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　January, 1984

定常线性系统的正性和最优性

王恩平　　王朝珠
（中国科学院系统科学研究所）

摘　要

本文从正实函数和最优控制系统理论出发，讨论了定常线性系统的正性和最优性之间的关系，从而得出，一个定常线性系统经稳定的常增益最优状态反馈后得到的闭环系统是正的；反之，一个正系统，经过单位输出负反馈得到的闭环系统是稳定的和最优的。

一、引　言

R. E. Kalman 曾解决了最优线性控制系统中的反问题[1]。所谓反问题，是指已知某个定常线性系统和一个常增益状态反馈控制规律，寻找某个二次性能指标，使得对这个性能指标控制规律是最优的。Kalman 给出了这个问题有解的频率条件。此外，Kalman－Якубович 正实引理[4,5]也给出了一个判别正实函数的频率条件。本文从分析这两个似乎毫不相关的频率条件出发，发现了最优系统和正系统之间的关系，即一个定常线性系统经稳定的常增益最优状态反馈得到的闭环系统是正的；反之，一个正的定常线性系统经单位输出负反馈得到的闭环系统是稳定的和最优的。然后，我们把这一结果推广到多输入－多输出系统中去。需要指出，本文的定理 3 在参考文献〔7〕中已给了提示性的证明，但是，我们所用的方法比那里简单得多。

二、单输入－单输出系统

已知单输入定常线性系统

$$\dot{\mathrm{x}} = A\mathrm{x} + \mathrm{b}u, \tag{2.1}$$

其中　x 是 n 维状态矢量，u 是控制输入变量，A 是 $n\times n$ 阶常值矩阵，b 是 n 维矢量。

现在，取系统（2.1）的一个常增益状态反馈

$$u = -\mathrm{k}^T\mathrm{x}, \tag{2.2}$$

其中　k 是 n 维矢量，“T”表示转置。

定义 1　如果 $A-\mathrm{bk}^T$ 的特征值都在复平面的左半开平面内，那么我们就说反馈控制规律（2.2）是稳定的；如果存在一个矢量 q，反馈控制规律（2.2）使性能指标

$$J=\int_0^\infty (\mathrm{x}^T\mathrm{qq}^T\mathrm{x}+u^2)\,dt$$

本文于 1982 年 12 月 21 日收到。1983年5月10日收到修改稿。
本文曾于 1982 年 5 月在四川峨眉第三届全国控制理论及其应用学术交流会上宣读。

达到极小，则称（2.2）是系统（2.1）的最优控制律。这时，闭环系统（2.1)—(2.2）称为最优系统。

令
$$\phi_k(s)=\det[sI-A+\mathbf{b}\mathbf{k}^T],\quad \phi(s)=\det[sI-A],$$
$\varphi(s)=\mathbf{k}^T\mathrm{Adj}(sI-A)\mathbf{b}$，其中 det（·）表示矩阵的行列式，Adj（·）表示伴随矩阵。显然有
$$\phi_k(s)=\phi(s)[1+\mathbf{k}^T(sI-A)^{-1}\mathbf{b}],$$
由此得出
$$1+\mathbf{k}^T(sI-A)^{-1}\mathbf{b}=\frac{\phi_k(s)}{\phi(s)},\tag{2.3}$$
$$\phi_k(s)=\phi(s)+\varphi(s)。\tag{2.4}$$

定义 2　设 $G(s)$ 是 s 的有理分式，s 是复变量，我们称它是正实的，如果

1. 当 s 是实数时，$G(s)$ 是实的；
2. $G(s)$ 在右半开平面内解析；
3. 在虚轴上，$G(s)$ 的极点都是简单的，其留数是实的和非负的；
4. 对任意实数 ω，只要 $s=j\omega$ 不是 $G(s)$ 的极点就有 $Re\{G(j\omega)\}\geq 0$，

其中 $Re\{\cdot\}$ 表示复数的实部，j 为虚数单位。

引理 1　令
$$G(s)=\frac{g(s)}{f(s)},$$
其中 $f(s)$ 和 $g(s)$ 都是 s 的多项式，$f(s)$ 与 $g(s)$ 互质，则 $G(s)$ 为正实函数的充分必要条件是

1. $\Delta(s)=f(s)+g(s)$ 是稳定的多项式，即 $\Delta(s)$ 的零点都在左半开平面内；且 $\Delta^{-1}(s)f(s)$ 是真有理分式。
2. 对所有实数 $\omega\geq 0$，只要 $j\omega$ 不是 $G(s)$ 的极点就有 $Re\{G(j\omega)\}\geq 0$。

这个引理的证明请见参考文献〔3〕。

定理 1　已知系统（2.1）和反馈控制规律（2.2），设（$A,\mathbf{b}$）能控，（$A,\mathbf{k}^T$）能观测。如果有理函数 $\mathbf{k}^T(sI-A)^{-1}\mathbf{b}$ 正实，那么（2.2）必是系统（2.1）的一个稳定的最优控制规律。

证　由假设知，$\mathbf{k}^T(sI-A)^{-1}\mathbf{b}$ 没有零极相消。由（2.3）和（2.4）不难推知
$$\mathbf{k}^T(sI-A)^{-1}\mathbf{b}=\frac{\varphi(s)}{\phi(s)},\tag{2.5}$$
从而可知 $\varphi(s)$ 与 $\phi(s)$ 互质。再由引理 1 得出，$\phi_k(s)=\phi(s)+\varphi(s)$ 是一个稳定的多项式，即 $A-\mathbf{b}\mathbf{k}^T$ 是稳定矩阵。这说明（2.2）是系统（2.1）的一个稳定的控制规律。

依题设 $\mathbf{k}^T(sI-A)^{-1}\mathbf{b}$ 正实，所以当 $s=j\omega$ 不是它的极点时有
$$Re\{\mathbf{k}^T(j\omega I-A)^{-1}\mathbf{b}\}\geq 0,\quad \forall 实数\ \omega,\tag{2.6}$$
又因为
$$|1+\mathbf{k}^T(j\omega I-A)^{-1}\mathbf{b}|^2=[1+Re\{\mathbf{k}^T(j\omega I-A)^{-1}\mathbf{b}\}]^2$$

$$+[I_m\{\mathbf{k}^T(j\omega I-A)^{-1}\mathbf{b}\}]^2。$$

这里$I_m\{\cdot\}$表示复数的虚部。于是由（2.6）知，当$j\omega$不是$\mathbf{k}^T(j\omega I-A)^{-1}\mathbf{b}$的极点时有

$$|1+\mathbf{k}^T(j\omega I-A)^{-1}\mathbf{b}|^2\geq 1。\tag{2.7}$$

当$j\omega$是$\mathbf{k}^T(j\omega I-A)^{-1}\mathbf{b}$的极点时，（2.7）显然成立。因此，不等式（2.7）对任意实数ω成立。于是由最优控制的反问题的频率条件[1]可知，（2.2）是系统（2.1）的一个最优控制规律，从而定理证毕。

定理表明，对系统（2.1），若（A, $\mathbf{b}$, $\mathbf{k}^T$）构成一个单输入-单输出正系统（即$\mathbf{k}^T(Is-A)^{-1}\mathbf{b}$正实），那么（2.2）就是系统（2.1）的稳定的最优控制规律。

定理 2 已知系统（2.1）和控制规律（2.2）。设（A, $\mathbf{b}$）能控，（A, $\mathbf{k}^T$）能观测，如果（2.2）是系统（2.1）的一个稳定的最优控制规律，那么有理函数$\mathbf{k}^T(sI-A+\mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1}\mathbf{b}$是正实的。

证　显然，当s是实数时，$\mathbf{k}^T(sI-A+\mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1}\mathbf{b}$是实数。由于（2.2）是稳定的控制规律，因此有理函数$\mathbf{k}^T(sI-A+\mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1}\mathbf{b}$在右半闭平面内解析。此外，由于（2.2）是系统（2.1）的最优控制规律，因此由最优控制的频率条件知，

$$|1+\mathbf{k}^T(j\omega I-A)^{-1}\mathbf{b}|^2\geq 1,\ \forall\text{实数}\ \omega。\tag{2.8}$$

再由（2.3）和（2.8）得

$$\left|\frac{\phi(j\omega)}{\phi_k(j\omega)}\right|\leq 1,\ \forall\text{实数}\ \omega。\tag{2.9}$$

于是由（2.9）推得

$$\left|Re\left\{\frac{\phi(j\omega)}{\phi_k(j\omega)}\right\}\right|\leq 1,\ \forall\text{实数}\ \omega。\tag{2.10}$$

另一方面，由（2.3）又有

$$\mathbf{k}^T(sI-A+\mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1}\mathbf{b}=\frac{\varphi(s)}{\phi_k(s)},\tag{2.11}$$

而从（2.4）得出

$$\frac{\varphi(s)}{\phi_k(s)}=1-\frac{\phi(s)}{\phi_k(s)}。\tag{2.12}$$

于是由（2.11）和（2.12）得

$$R_e\{\mathbf{k}^T(j\omega I-A+\mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1}\mathbf{b}\}=1-Re\left\{\frac{\phi(j\omega)}{\phi_k(j\omega)}\right\},\ \forall\text{实数}\ \omega。\tag{2.13}$$

最后，由（2.10）和（2.13）得

$$Re\{\mathbf{k}^T(j\omega I-A+\mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1}\mathbf{b}\}\geq 0,\ \forall\text{实数}\ \omega。\tag{2.14}$$

综上所述，依定义知$\mathbf{k}^T(sI-A+\mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1}\mathbf{b}$是正实数，从而定理2证毕。

这个定理表明，经稳定的最优控制规律得到的闭环系统是正的。

三、多输入一多输出系统

在前一节得到的结果完全可以推广到多输入－多输出系统。

设多变量系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \tag{3.1}$$

其中 $\mathbf{x}$，A 与（2.1）意义相同，B 为 $n\times r$ 阶常阵，$\mathbf{u}$ 为 r 维控制输入矢量。系统（3.1）的一个反馈控制规律为

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x}, \tag{3.2}$$

其中 K 为 $r\times n$ 阶常阵。

定义 3　如果 $A-BK$ 的特征值都在复平面的左半开平面内，那么我们就称（3.2）为系统（3.1）的稳定的控制规律。如果存在一个对称非负定矩阵 $Q=C^TC$，并且（A，C）能观测，反馈控制规律（3.2）使性能指标

$$J=\int_0^\infty(\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}+\mathbf{u}^T\mathbf{u})dt$$

达到极小，则称（3.2）是系统（3.1）的一个最优控制规律。

定义 4　设 $Z(s)$ 是一个有理分式矩阵，如果，

1．$Z(s)$的每个元都在 $Re[s]>0$ 内解析；

2．对所有实数 ω，只要 $j\omega$ 不是 $Z(s)$ 的任何元素的极点，那么 $Z^H(j\omega)+Z(j\omega)\geq 0$，这里“$H$”表示矩阵的共轭转置；

3．如果 $j\omega_0$ 是 $Z(s)$的某个元素的极点，那么它是一个简单极点，其留数矩阵是非负定的赫米特矩阵，

则称 $Z(s)$ 为正实的。

定理 3　已知系统（3.1）和控制规律（3.2）。如果 $K(sI-A)^{-1}B$是正实的，并且（A，B）能控，（A，K）能观测，那么（3.2）必是系统（3.1）的一个稳定的最优控制规律。

证　由于 $K(sI-A)^{-1}B$ 是正实的，因此根据正实引理[7]可知，存在 $r\times n$ 阶阵 L 和 $n\times n$ 阶正定对称矩阵P，使得

$$PA+A^TP=-L^TL, \tag{3.3}$$

$$PB=K^T。 \tag{3.4}$$

在等式（3.3）两边分别减去 PBB^TP 和 K^TK，得

$$PA+A^TP-PBB^TP=-(L^TL+K^TK)。 \tag{3.5}$$

令 $Q=L^TL+K^TK$，显然 $Q\geq 0$，并且 Q 对称，因而存在 $l\times n$ 阶矩阵C，$l=\mathrm{rank}Q$，使得 $Q=C^TC$。从而

$$L^TL+K^TK=C^TC。 \tag{3.6}$$

于是由（3.5）和（3.6）得

$$PA+A^TP-PBB^TP+C^TC=0。 \tag{3.7}$$

这是一个代数黎卡提方程，它有对称正定解。

由于（A，K）能观测，可以证明（A,C）也能观测。事实上，若令 $\ker C$ 表示矩阵 C 的零空间，并且 $x_0 \in \ker C$，那么有

$$x_0^T L^T L x_0 + x_0^T K^T K x_0 = x_0^T C^T C x_0 = 0,$$

从而有 $Lx_0 = 0$，$Kx_0 = 0$，即

$$x_0 \in \ker L \cap \ker K, \tag{3.8}$$

再由 x_0 的任意性可得

$$\ker C \subset \ker L \cap \ker K, \tag{3.9}$$

或者

$$\ker C \subset \ker K。 \tag{3.10}$$

如果 x_1 是 A 的任意特征矢量，相应的特征值为 λ_1，那么我们有

$$(\lambda_1 I - A)x_1 = 0。 \tag{3.11}$$

由于（A，K）能观测，因此必有

$$\operatorname{rank}[\lambda_1 I - A^T,\ K^T] = n,$$

从而 $Kx_1 \neq 0$。于是由（3.10）看出也有

$$Cx_1 \neq 0。 \tag{3.12}$$

这就是说，对 A 的每个特征值 λ，如果有

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} x = 0,$$

必有 $x = 0$。这说明 $\operatorname{rank}[\lambda I - A^T, C^T] = n$，即（$A$，$C$）能观测。

又因为（A，B）能控，所以 P 是代数黎卡提方程（3.7）的唯一正定对称解，并且 $A-BK$ 是稳定阵[6]。从而可以知道，（3.2）是系统（3.1）相对性能指标 J 来说的稳定的最优控制规律。于是定理得证。

这个定理是定理 1 的推广，虽然这个结论在文献〔7〕中已经有了，但这里的证明方法是比较简单的。对定理 1，我们完全用频率法给出其证明，而对定理 3 我们则是用代数黎卡提方程解的存在唯一性来研究控制规律的稳定性和最优性的。

定理 4 已知系统（3.1）和控制规律（3.2），以及非负定对称矩阵 $Q = C^T C$。设（A，B）能控，（A，C）能观测。如果（3.2）是系统（3.1）的一个稳定的最优控制规律，其性能指标为 J，那么有理分式矩阵 $K(sI - A + BK)^{-1}B$ 是正实的。

证　由于（A，B）能控，（A，C）能观测，并且（3.2）是系统（3.1）相对性能指标 J 的稳定最优控制规律，则根据无穷时间上的最优控制理论可知，存在唯一正定对称矩阵 P，使得下列方程成立：

$$K^T = PB, \tag{3.13}$$

$$PA + A^T P - PBB^T P + Q = 0。 \tag{3.14}$$

易知，

$$P(A-BK) + (A-BK)^T P = -(Q + K^T K)。 \tag{3.15}$$

显然，$Q + K^T K \geq 0$，故存在矩阵 L，使得 $Q + K^T K = L^T L$，于是由（3.13）和（3.15）说明 K，$A-BK$，B 满足正实引理，故 $K(sI - A + BK)^{-1}B$ 是正实矩阵。从而定理得证。

推论 1　已知系统（3.1）和控制规律（3.2）。设（A, B）能控，（A, K）能观测，Q 为非负定对称矩阵，并且 $Q=C^TC$，（A, C）能观测。如果（3.2）是系统（3.1）的一个稳定的最优控制规律，那么，对任意自然数 m，

$$\mathbf{u}=-mK\mathbf{x} \tag{3.16}$$

总是系统（3.1）关于某个二次性能指标 J_m 的稳定的最优控制规律，并且 $K(sI-A+mBK)^{-1}B$ 总是正实的。

证　当 $m=1$ 时，依假设可知，（3.16）是关于性能指标

$$J_1=\int_0^\infty(\mathbf{x}^TQ\mathbf{x}+\mathbf{u}^T\mathbf{u})\,dt$$

的稳定的最优控制规律。由定理 4 可知，矩阵 $K(sI-A+BK)^{-1}B$ 是正实的。这就是说，推论 1 对 $m=1$ 是正确的。

下面，我们采用归纳法证明。假设（3.16）是系统（3.1）关于某个二次性能指标 J_m 的稳定的最优控制规律，并且有理分式矩阵 $K(sI-A+mBK)^{-1}B$ 是正实的。可以证明，推论 1 对 $m+1$ 也是正确的。事实上，依归纳法假设和最优控制理论知道，存在正定对称矩阵 $\overline{P}$ 和非负定对称矩阵 $\overline{Q}$，使得

$$mK=B^T\overline{P}, \tag{3.17}$$

$$\overline{P}A+A^T\overline{P}-\overline{P}BB^T\overline{P}+\overline{Q}=0。 \tag{3.18}$$

其中 $\overline{Q}=\overline{C}^T\overline{C}$，（$A$, $\overline{C}$）能观测。

另一方面，由于（3.2）是系统（3.1）的稳定的最优控制规律，则一定存在正定对称矩阵 P，满足方程

$$K=B^TP, \tag{3.19}$$

$$PA+A^TP-PBB^TP+Q=0。 \tag{3.20}$$

并且，$A-BK$ 是稳定的矩阵。

现在，令

$$P^*=P+\overline{P}。 \tag{3.21}$$

显然，P^* 也是正定对称矩阵，由（3.17）、（3.19）和（3.21）得

$$(m+1)K=B^TP^*。 \tag{3.22}$$

再由（3.18）和（3.20）得

$$(\overline{P}+P)A+A^T(\overline{P}+P)-\overline{P}BB^T\overline{P}-PBB^TP+\overline{Q}+Q=0。 \tag{3.23}$$

从（3.17）、（3.19）和（3.23）得

$$(\overline{P}+P)A+A^T(\overline{P}+P)-(\overline{P}+P)BB^T(\overline{P}+P)+2mK^TK+\overline{Q}+Q=0。 \tag{3.24}$$

于是，由（3.21）和（3.24）得

$$P^*A+A^TP^*-P^*BB^TP^*+\widetilde{Q}=0。 \tag{3.25}$$

其中 $\widetilde{Q}=2mK^TK+\widetilde{Q}+Q=\widetilde{C}^T\widetilde{C}\geq0$。由于（$A$, K）能观测，和定理 3 的证明一样，（A, $\widetilde{C}$）也能观测。因为（A, B）能控，所以代数黎卡提方程（3.25）存在唯一正定

对称解 $P^* = P + \overline{P}$，并且 $K^* = B^T P^*$ 是最优反馈增益矩阵，$A - BK^*$ 是稳定矩阵，即

$$\mathbf{u} = -(m+1)K\mathbf{x}$$

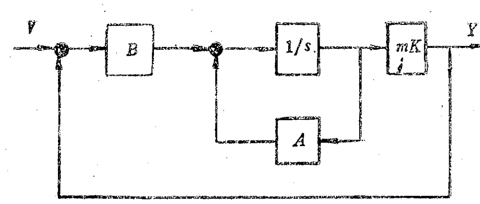
是系统（3.1）关于性能指标

$$J_{m+1} = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \widetilde{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u})\,dt$$

的最优控制规律，并且 $A-(m+1)BK$ 是稳定矩阵。再由定理4知，有理分式阵 $K(sI - A + (m+1)BK]^{-1}B$ 是正实的。因此，由归纳法推知，推论1对任意自然数都是正确的

推论 2 设（A，B）能控，（A，K）能观测。则只要 $K(sI-A)^{-1}B$ 是正实的，那么对任意自然数 m，$K(sI-A+mBK)^{-1}B$ 总是正实的，并且 $\mathbf{u} = -mK\mathbf{x}$ 是系统（3.1）在某个性能指标下的稳定的最优控制规律。

现在，我们对推论1和2给予工程上的解释。为此，考察如下图所示的反馈控制系统。对这个系统来说，只要 $m=1$，它是一个正系统，那么它对任何自然数 m 永远是正系统。如果把它看成状态反馈控制系统，则它总是某个二次性能指标下的最优控制系统。同样，如果当 $m=1$ 时这个系统是某个性能指标下的最优控制系统，那么上述结论也是对的。当我们从稳定性的角度来考虑这个系统时，它的增益裕度为无穷大，这与最优控制系统的稳定裕度为无穷大的事实相符[8]。事实上，我们从系统的正性和稳定性、最优性之间的关系中也说明了这一性质。



正系统的示意方块图

参 考 文 献

〔1〕 Kalman, R. E., When is a Linear Control System Optimal?, ASME. Basic Engineering, **86**, 1 (1964), 51—60.

〔2〕 Anderson, B. D. O., A System Theory Criterion for Positive Real Matrices, SIAM J. Control **5**, 2 (1967), 171—182.

〔3〕 Šiljak, D. D., Algebraic Criterion for Absolute Stability Optimality and Positivity of Dynamic Systems, Proc. IEE, **117**, 10 (1970), 2033—2036.

〔4〕 Popov, V. M., Hyperstability of Control Systems, Spring-Verlag, New York (1973).

〔5〕 Landau, Y., Adaptive Control-The Model Reference Approach, Marcel Dekker, INC. New York and Basel (1979).

〔6〕 M'artensson, K., On the Matrix Riccati Equation, Information Science, **3** (1971), 17—49.

〔7〕 Anderson, B. D. O. and Vongpanitlerd, S., Network Analysis and Synthesis—A Modern Systems Theory Approach, Prentice -Hall, INC. Englewood Cliffs, New Jersey (1973).

[8] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Linear Optimal Control, Prentice-Hall (有中译本) (1971).

POSITIVITY AND OPTIMALITY FOR LINEAR MULTIVARIABLE TIME—INVARIANT SYSTEMS

Wang Enping　　Wang Chaozhu

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, the relationships of positivity and optimality for linear time-invariant systems are considered. First, the relationship of positivity and optimality for single-input single-output linear time-invariant systems is discussed by the frequency domain method. Next, for multivariable linear time-invariant systems, this relationship is discussed by the time domain method. The main results are as follows: The closed loop system formed by stable optimal state feedback is positive, its transfer function matrix is positive real. Conversely, if the open loop transfer function matrix is positive real, then the closed loop system obtained by negative unity output feedback is stable and optimal. Finally, from the discussion of the relationships of positivity and optimality we showed that the stable gain margin of optimal control systems is infinite.