

正弦函数输入时高阶模型的最优简化

张钟俊 白尔维
(上海交通大学)

摘 要

本文讨论了在正弦函数输入时高阶模型的最优简化问题。主要思路是对于突加正弦函数输入的系统,找出一个具有相同频率的正弦函数和脉冲函数的叠加输入、但具有相同输出的另一个系统,其瞬态输出部分由脉冲函数输入所引起,而稳态输出部分则由正弦函数输入所引起。对这一系统求出对应于脉冲函数输入部分的最优简化模型,再对稳态部分进行配置,转换到只有正弦函数输入的系统,从而求得简化模型的系统方程。

本文给出了具体的计算步骤和数值例子。

一、引 言

模型简化是在大系统理论中具有工程意义的一个重要问题。如果在某种意义下,能用一个低阶模型较好地代替一个高阶模型,对设计就会带来许多便利之处。

目前,模型简化已经有许多方法,其中积分平方误差法经 Wilson^[1]提出后,有了很大的发展。但现有的方法都是考虑输入为脉冲、阶跃或幂函数形式的^[2]。而实际上,许多系统的输入并不是脉冲、阶跃或幂函数,这就需要讨论在其他输入时模型的最优简化问题。

在工业系统中,正弦信号占有非常重要的地位。例如在电力系统中,就经常需要研究系统在50周正弦信号输入下的工作情况。而电力系统往往是一个大系统,阶数很高,不便于研究,这就要讨论在50周正弦输入时模型的最优简化问题。

本文讨论了突加正弦函数输入时高阶模型的最优简化问题。主要思路是对突加正弦输入的系统,找出一个正弦和脉冲叠加输入、但具有相同输出的另一系统,其瞬态部分由脉冲输入所引起,而稳态部分则由具有相同频率的另一正弦输入引起。然后,对这一系统求出对应于脉冲输入部分的最优简化模型,再对稳态部分进行配置,转换到只有正弦输入的系统,从而求得简化模型。

二、输入为脉冲、阶跃或幂函数时模型的最优简化

考虑一个高阶定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u} \in R^p, \mathbf{y} \in R^q. \end{cases} \quad (1)$$

现求一个简化的定常线性系统, 具有下列的系统方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_r \mathbf{x}_r(t) + B_r \mathbf{u}(t), \mathbf{x}_r(0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{y}_r(t) = C_r \mathbf{x}_r(t) + D\mathbf{u}(t) + E \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) + F \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(t) + \dots, \\ \mathbf{x}_r \in R^m, \mathbf{u} \in R^p, \mathbf{y}_r \in R^q. \end{cases} \quad (2)$$

并使下列性能指标在某一给定的输入时达到最小

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r)^T Q (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r) dt, \quad (3)$$

其中 Q 为正定加权矩阵, 一般选取为对角阵。

Wilson 已经解决了当给定输入为脉冲、阶跃或幂函数时的上述问题^[1,2], 并给出了具体算法^[3], 还推出: 当输入为脉冲函数时, $D = E = F \dots = 0$; 当输入为阶跃函数时, $D \neq 0, E = F = \dots = 0$, 余类推。遗憾的是, 对其他类型的输入, Wilson 和其他作者讨论较少。本文将讨论输入为突加正弦函数时模型的最优简化问题。

三、输入为 $\sin \omega t$ 时模型的最优简化

引理 1 如果系统 (1) 渐近稳定, 则 $(A^2 + \omega^2 I)$ 可逆, $\forall \omega \in R$ 。

证 当系统 (1) 渐近稳定时, A 的所有特征值都具有负实部。设 A 共有 k 个特征值 $\lambda_i (i=1, \dots, k)$, 第 i 个特征值的重数为 i_i , 则有

$$\sum_{i=1}^k i_i = n.$$

令 M 是将 A 变换为约当型的相似变换矩阵, 即

$$MAM^{-1} = J,$$

其中

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix},$$

于是

$$J_i^2 = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \lambda_i^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A^2 + \omega^2 I| &= |M^{-1}| \cdot |JMM^{-1}J + \omega^2 I| \cdot |M| = |J^2 + \omega^2 I| \\ &= \left| \begin{bmatrix} J_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k^2 \end{bmatrix} + \omega^2 I \right| \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^k |J_i^2 + \omega^2 I| = \prod_{i=1}^k (\lambda_i^2 + \omega^2)^{2l_i} \quad (4)$$

因为 $Re(\lambda_i) < 0, \forall i$, 所以 $(\lambda_i^2 + \omega^2) \neq 0$ 。

故由式(4)得 $|A^2 + \omega^2 I| \neq 0$, 因而 $A^2 + \omega^2 I$ 可逆。

引理 2 如果 $(A^2 + \omega^2 I)$ 可逆, 则有

$$(sI - A)^{-1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = (sI - A)^{-1} \omega (\omega^2 I + A^2)^{-1} - A(\omega^2 I + A^2)^{-1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - (\omega^2 I + A^2)^{-1} \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2}, \quad (5)$$

其中 s 为拉普拉斯算子。

证 只要对式(5)左乘矩阵 $(sI - A)$, 右乘矩阵 $(A^2 + \omega^2 I)$, 就可证明上式。

有了上面两条引理, 就不难得到以下结论。

结论 对渐近稳定的系统(1), 在突加正弦函数输入时:

$$u(t) = \begin{cases} V \sin \omega t & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad (6)$$

它的输出 $y(t)$ 与下列系统(7)的输出 $Z(t)$ 完全相同

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + \omega(\omega^2 I + A^2)^{-1} Bv(t), & \xi(0) = 0, \\ Z(t) = C\xi(t) - CA(\omega^2 I + A^2)^{-1} Bu(t) - C(\omega^2 I + A^2)^{-1} B \frac{d}{dt} u(t), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\omega \in R, V$ 为任一个 P 维向量, $v(t) = V\delta(t)$ 。

证 系统(1)在突加正弦函数输入(6)的作用下, 输出 $y(t)$ 的拉氏变换为

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} B V \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}。$$

系统(7)在突加正弦函数和脉冲函数叠加输入时, 输出 $Z(t)$ 的拉氏变换为

$$Z(s) = C\omega(sI - A)^{-1}(\omega^2 I + A^2)^{-1} B V - CA(\omega^2 I + A^2)^{-1} B V \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - C(\omega^2 I + A^2)^{-1} B V \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2}。$$

由引理 1 和引理 2 可知, $Y(s) = Z(s)$ 。所以系统(1)在正弦函数输入时的输出 $y(t)$, 与系统(7)在正弦和脉冲函数叠加输入时的输出 $Z(t)$ 完全相同。

因为系统(1)是渐近稳定的, 而系统(7)具有同样的 A , 所以也是渐近稳定的, 因而在脉冲输入时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0。$$

由上式和前述结论,可知系统(7)的稳态输出也就是系统(1)的稳态输出,为

$$-CA(\omega^2 I + A^2)^{-1}Bu(t) - C(\omega^2 I + A^2)^{-1}B \frac{d}{dt} u(t).$$

四、输入为正弦函数时模型的最优简化的具体计算步骤

根据上节所得的结论,我们可以求得在正弦函数输入时系统(1)的简化模型的系统方程。这可分成下列五个步骤来完成。

步骤(1) 对突加正弦函数输入的系统(1),找出在正弦函数和脉冲函数叠加输入、但具有相同输出的系统(7),即从

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

中,找到

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + \omega(\omega^2 I + A^2)^{-1}Bv(t), \\ Z(t) = C\xi(t) - CA(\omega^2 I + A^2)^{-1}Bu(t) - C(\omega^2 I + A^2)^{-1}B \frac{d}{dt} u(t). \end{cases}$$

步骤(2) 将系统(7)输出的瞬态和稳态部分分开,与瞬态部分相对应的系统方程为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + \omega(\omega^2 I + A^2)^{-1}Bv = A\xi + \hat{B}v, \\ Z' = C\xi, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\hat{B} = \omega(\omega^2 I + A^2)^{-1}B$ 。

步骤(3) 因为系统(8)只有脉冲输入,所以可以用 Wilson 算法^[1,3]求得它的最优简化模型方程

$$\begin{cases} \dot{\xi}_r = A_r \xi_r + \hat{B}_r v, \\ Z_r' = C_r \xi_r. \end{cases} \quad (9)$$

令 $B_r = \frac{1}{\omega}(A_r^2 + \omega^2 I)\hat{B}_r$,即可将方程(9)改写成

$$\begin{cases} \dot{\xi}_r = A_r \xi_r + \omega(\omega^2 I + A_r^2)^{-1}B_r v, \\ Z_r' = C_r \xi_r. \end{cases} \quad (10)$$

步骤(4) 对由式(10)求得的脉冲输入的最优简化模型,加上系统(7)的稳态输出,便得到下式

$$\begin{cases} \dot{\xi}_r = A_r \xi_r + \omega(\omega^2 I + A_r^2)^{-1}B_r v, \\ Z_r = C_r \xi_r - CA(\omega^2 I + A^2)^{-1}Bu - C(\omega^2 I + A^2)^{-1}B \frac{d}{dt} u. \end{cases} \quad (11)$$

步骤(5) 我们的目的是求只有正弦函数输入时与系统(11)具有相同输出的系统方程,因此必须适当地改变式(11)的形式,才能利用上述结论。对由正弦和脉冲函

数叠加输入时的系统方程(11)转换到仅有正弦函数输入时的系统方程,其具体步骤如下:

1) 先把式(11)配置成式(7)所示的形式

$$\begin{cases} \dot{\xi}_r = A_r \xi_r + \omega(\omega^2 I + A^2)^{-1} B_r v, \\ z_r = C_r \xi_r - CA(\omega^2 I + A^2)^{-1} B u - C(\omega^2 I + A^2)^{-1} B \frac{d}{dt} u \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= C_r \xi_r - C_r A_r (\omega^2 I + A_r^2)^{-1} B_r u - C_r (\omega^2 I - A_r^2)^{-1} B_r \frac{d}{dt} u \\ &+ [C_r A_r (\omega^2 I + A_r^2)^{-1} B_r - CA(\omega^2 I + A^2)^{-1} B] u \\ &+ [C_r (\omega^2 I + A_r^2)^{-1} B_r - C(\omega^2 I + A^2)^{-1} B] \frac{d}{dt} u. \end{aligned}$$

2) 利用上面证明的结论,可将式(12)中的第一式和第二式中的前三项改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u, \\ y_r' = C_r x_r. \end{cases}$$

并令 $y_r = y_r' + [C_r A_r (\omega^2 I + A_r^2)^{-1} B_r - CA(\omega^2 I + A^2)B] u + [C_r (\omega^2 I + A_r^2)^{-1} B_r - C(\omega^2 I + A^2)^{-1} B] \frac{d}{dt} u$. 于是最后得到只有正弦函数输入、但具有相同输出的系统方程

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u, \\ y_r = C_r x_r + [C_r A_r (\omega^2 I + A_r^2)^{-1} B_r - CA(\omega^2 I + A^2)B] u \\ \quad + [C_r (\omega^2 I + A_r^2)^{-1} B_r - C(\omega^2 I + A^2)^{-1} B] \frac{d}{dt} u. \end{cases} \quad (13)$$

式(13)就是输入为正弦函数时,系统(1)的最优简化模型的系统方程,它的稳态输出和原系统(1)的稳态输出完全相同。

五、算 例

现对一个4阶的定常线性系统,按照上述五个步骤简化成一个2阶系统。

设系统由下列方程所描述

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1.58 \\ 0.4 \\ 1.341 \\ 6.588 \end{pmatrix} u, \\ y = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0.8 & 1.2 \\ 0.7 & 0 & 0 & 1.7 \end{pmatrix} x, \end{cases}$$

其中 $u = \sin t$, $x(0) = 0$, 并设 Q 为单位阵。

(1) 从上述正弦函数输入时的系统方程,找一个由正弦函数和脉冲函数叠加输入,

但具有相同输出的系统方程式(7)如下

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0 \\ 0.9 \\ 2.7 \end{pmatrix} v, \\ z = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0.8 & 1.2 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1.7 \end{pmatrix} \xi - \begin{pmatrix} -4.992 \\ -5.788 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 6.96 \\ 5.99 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} u. \end{cases}$$

(2) 与瞬态部分相对应的系统方程为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0 \\ 0.9 \\ 2.7 \end{pmatrix} v, \\ z' = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0.8 & 1.2 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1.7 \end{pmatrix} \xi. \end{cases}$$

(3) 求出系统的最优简化模型。这里我们采用的具体算法是：选取最优简化模型为可控标准型，即选择

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad b_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

然后参照 Wilson 的算法^[1]，列出图 1 所示的算法框图。

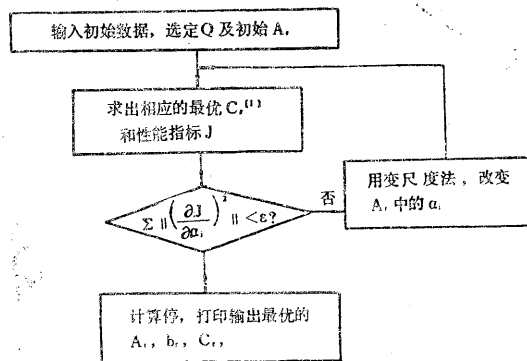


图 1 脉冲输入时最优简化模型的算法框图

按框图排出计算程序(程序从略)，在 DJS-130 计算机上进行计算，求得它的 2 阶简化模型为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.305091 & -0.756024 \end{pmatrix} \xi_r + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v, \\ z_r' = \begin{pmatrix} 1.67779 & 6.67891 \\ 1.20127 & 4.95395 \end{pmatrix} \xi_r. \end{cases}$$

(4) 加上式(8)要求的正弦函数输入部分, 得到下列系统方程

$$\begin{cases} \dot{\xi}_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.305091 & -0.756024 \end{pmatrix} \xi_r + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v, \\ z_r = \begin{pmatrix} 1.67779 & 6.67891 \\ 1.20127 & 4.95395 \end{pmatrix} \xi_r - \begin{pmatrix} -4.992 \\ -5.788 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 6.96 \\ 5.99 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} u. \end{cases}$$

(5) 将上式转换到仅有正弦函数输入时的系统方程

$$\begin{cases} \dot{x}_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.305091 & -0.756024 \end{pmatrix} x_r + \begin{pmatrix} -0.756024 \\ 1.5715722 \end{pmatrix} u, \\ y_r = \begin{pmatrix} 1.67779 & 6.67891 \\ 1.20127 & 4.95393 \end{pmatrix} x_r + \begin{pmatrix} 1.620374 \\ 3.243965 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} -0.28109 \\ -1.03605 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} u. \end{cases}$$

这就是这个算例所给的4阶系统在正弦函数输入下的2阶最优简化模型的系统方程。图2和图3分别表示在正弦函数输入时, 原系统和简化模型系统的输出曲线。它们吻合的精度较高。

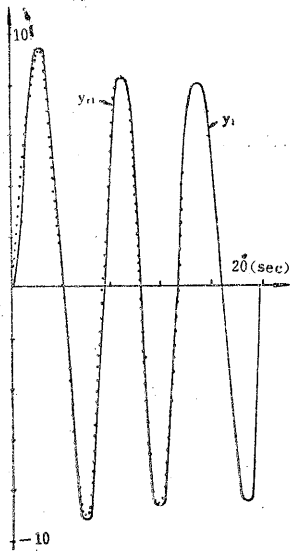


图2 正弦输入时 y_1, y_{11} 曲线

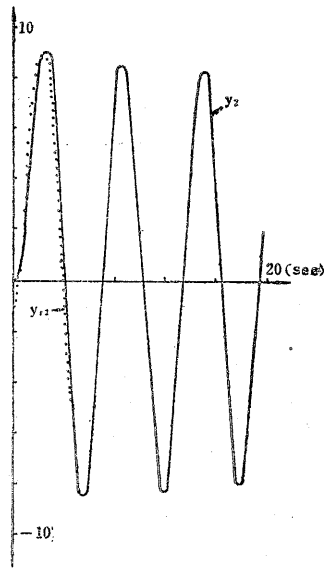


图3 正弦输入时 y_2, y_{22} 曲线

六、结束语

本文讨论了当输入为正弦函数时, 高阶系统的最优简化问题。但得到的模型是与频率 ω 有关的, 因此当角频率有一些偏离时, 简化模型应如何相应地改变, 使得能够较好地适应, 似可进一步加以研究。

参 考 文 献

- [1] Wilson, D. A., Optimum Solution of Model-Reduction Problem, Proc IEE, **117** (1970), 1161.
- [2] Wilson, D. A., Optimal Reduction of Multivariable System, Int. J. Control, **29** (1979), 267.
- [3] Mishra, R. N., Wilson, D. A., A New Algorithm for Optimal Reduction of Multivariable System, Int. J. Control, **31** (1980), 443.

OPTIMAL MODEL-REDUCTION OF MULTIVARIABLE SYSTEM WITH SINE-FUNCTION INPUT

Zhang Zhongjun Bai Erwei
(Shanghai Jiaotong University)

Abstract

This paper discusses the optimal model-reduction problem of a multivariable system with sine-function input. Its reduced model can be found from an intermediate model which has both sine-function and impulse-function inputs but with the same steady-state output. The response with impulse-function input corresponds to its transient part, while the sine-function input contributes the steady-state part. An algorithm for finding the reduced model is developed, and a numerical example is calculated showing that the output of this reduced model corresponds very closely to that of the original system.