第1卷 创刊号
1984年1月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 1, Initial Issue
January, 1984

一类非线性系统的可逆性

李 铁 钧
（南开大学）

摘 要

本文讨论定义在实解析流形上的如下形状的非线性系统的可逆性

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=A(x(t))+\sum\limits_{i=1}^{m}u_i(t)B_i(x(t)), \\ y(t)=C(x(t))。\end{cases}$$

本文主要结果是分别得到了如上系统具有可逆性的必要条件和充分条件。充分条件的证明是构造性的，因而可用来具体构造由系统的输出信息重现输入信息的逆系统。

一、引 言

在线性系统理论中，系统的可逆性[1-3]在理论研究及在滤波、预测理论、系统解耦、图象识别等诸多方面都起着重要作用。因此对非线性系统讨论可逆性乃是十分重要的理论问题。众所周知，一般非线性系统的研究困难极大。所以直到目前非线性系统可逆性的研究进展甚微，仅限于对如下的单输入非线性系统

$$\frac{dx}{dt}=Ax+uBx$$

的可逆性讨论[4]。本文在〔4〕的基础上对如下一类非线性系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=A(x(t))+\sum\limits_{i=1}^{m}u(t)B_i(x_i(t)), \\ y(t)=C(x(t)) \end{cases} \tag{1}$$

讨论可逆性。主要结果是分别得到了可逆性的必要条件和充分条件。系统的可逆性实质上乃是系统由输出信息重现输入信息的能力。因此也同时得到了系统能输入重现的结果。

先引入符号：

M 表示连通实解析流形。$V(M)$表 M 上全体解析向量场构成的 Lie 代数。$C^{\omega}(M)$表 M 上全体解析函数的集合。

本文于1982年12月11日收到。1983年5月4日收到修改稿。

设 $X\in V(M)$，$x_0\in M$。$X(x_0)$表示 X 在 x_0 点的值（即 x_0 点的一切向量）。以 $\alpha_X(t, x_0)$表示通过点 x_0 的向量场 X 的积分曲线，即

$$\frac{d\,\alpha_X(t, x_0)}{dt}=X(\alpha_X(t, x_0)),\quad \alpha_X(0, x_0)=x_0\,。$$

设A，$B\in V(M)$，我们记$ad_A B=[A, B]$，$ad_A^k B=ad_A(ad_A^{k-1}B)$，$k=1,2,\cdots$。

考虑定义在实解析流形 M 上的上述非线性系统（1）。其中状态 $x\in M$。A，B_1，B_2，$\cdots$，$B_m\in V(M)$。控制函数 $u(t)$，$i=1, 2, \cdots, m$ 是$[0, +\infty)$上的实解析函数。简记$(u_1(t), \cdots, u_m(t))=u(t)$。$C$ 是 M 到 $\mathbb{R}^p$（R 表示实数域）的实解析映射。即 $C(x)=(C_1(x), C_2(x), \cdots, C_p(x))$，而 $C_i\in C^\omega(M)$，$i=1, 2, \cdots, p$。

类型（1）是一类具有重要实际意义的非线性系统，它包括了通常的双线性系统，大量的实际过程（许多化工过程、经济系统、自动机器手等）的模型都是这种类型的。

对任意初态$x_0=x(0)\in M$，任意允许控制函数 $u(t)$，我们用 $\pi(t, u, x_0)$表示（1）的状态方程的解（也简记为 $\pi(t)$），相应的输出记为$y(t, u, x_0)$，即$(yt, u, x_0)=C(\pi(t, u, x_0))$。

定义 1 系统（1）称为在 $x_0\in M$ 是可逆的，如果对任意两个不同的允许控制函数 $u(t)$，$v(t)$，总有 $y(t, u, x_0)\neq y(t, v, x_0)$。

定义 2 系统（1）称为可逆的，如果存在 M 的稠密开子流形 M_0，使得（1）在 M_0 上点点可逆。

对系统（1），我们定义

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}\infty & 若\ ad_A^k B_i(c_j)=0,\ k=0, 1, 2, \cdots,\\ l & 若\ ad_A^k B_i(c_j)=0,\ k=0, 1, \cdots, l-1\ 而\ ad_A^l B_i(c_j)\neq 0,\end{cases}$$
$$i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, p。$$

又记

$$[\alpha]=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p}\\ & \cdots & \cdots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mp}\end{pmatrix}。$$

注：严格讲将 α_{ij} 写成矩阵并不恰当，因为 α_{ij} 中有可能为∞，因此这只是一种简便记法。

二、可逆性的必要条件

引理 1 设 X，$Y\in V(M)$，$u(t)\in C^\omega(M)$，解析映射 α：$I\to M$（I 是 R 上一开区间）满足

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}=(X+u(t)Y)(\alpha(t)),\tag{2}$$

则对任意 $f\in C^\omega(M)$ 有

$$\frac{df(\alpha(t))}{dt}=(X+u(t)Y)(f)(\alpha(t))。\qquad (3)$$

证　设点 $\alpha(t)$ 有局部坐标系 $(U,\ \varphi)$，$\varphi(x)=(x_1(x),\ x_2(x),\ \cdots,\ x_n(x))$，$\forall x\in U$，设 X，Y 在 U 上的局部表达式为

$$X=\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad Y=\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial}{\partial x_i},$$

其中　a_i，$b_i\in C^{\omega}(U)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。则（2）式可写为

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left[a_i(\alpha(t))+u(t)\,b_i(\alpha(t))\right]\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\varphi(\alpha(t))}。$$

将此式两端作用到坐标函数 x_i 上，则右端是 $a_i(\alpha(t))+u(t)\,b_i(\alpha(t))$，左端是 $\frac{d\alpha(t)}{dt}(x_i)$。由 $\frac{d\alpha(t)}{dt}$ 的定义：$\frac{d\alpha(t)}{dt}=d\alpha\left(\frac{d}{dt}\right)_t$（$d\alpha$ 表示映射 α 的微分，$\left(\frac{d}{dt}\right)_t$ 表示 R 上的向量场 $\frac{d}{dt}$ 在点 t 的值）及 $d\alpha$ 的象与原象关系（参见[5]Chap. Ⅲ）乃有

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}(x_i)=d\alpha\left(\frac{d}{dt}\right)_t(x_i)=\frac{d}{dt}x_i(\alpha(t))。$$

故有

$$\frac{dx_i(\alpha(t))}{dt}=a_i(\alpha(t)+u(t))\,b_i(\alpha(t)),\qquad (4)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

由 $f(\alpha(t))=(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(\alpha(t)))=(f\circ\varphi^{-1})(x_1(\alpha(t)),\cdots,x_n(\alpha(t)))$，有

$$\frac{df(\alpha(t))}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\right)_{\varphi(\alpha(t))}\cdot\frac{dx_i(\alpha(t))}{dt},$$

代入（4）即得

$$\frac{df(\alpha(t))}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left[a_i(\alpha(t))+u(t)\,b_i(\alpha(t))\right]\left(\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\right)_{\varphi(\alpha(t))}$$

$$=(X+u(t)Y)(f)(\alpha(t))。$$

引理 2　设 $X\in V(M)$。$\alpha_X(t)$ 表示 X 的积分曲线。$f\in C^{\omega}(M)$，若 $X(f)=0$ 则 $f(\alpha_X(t))=\text{const}$（常值函数）。

证 $\alpha_X(t)$是X的积分曲线，故$\frac{d\alpha_X(t)}{dt}=X(\alpha_X(t))$。从而由引理1有$\frac{df(\alpha_X(t))}{dt}$ $=X(f)(\alpha_X(t))$。而$X(f)=0$，故得$\frac{df(\alpha_X(t))}{dt}=0$，因而$f(\alpha_X(t))=\text{const}$。

对系统（1），定义

$$D=\{ad^k_A B_i\ ;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}。\tag{5}$$

D在$V(M)$中生成的Lie子代数记为$[D]$。$[D]$是M上对合分布，因而对每点$x\in M$，有包含x的$[D]$的最大积分流形，记为$I([D],\ x)$。

注：这里的分布定义（不要求$\dim[D](x)=\text{const}$，$\forall x\in M$）与结论是微分几何中原有定义和结论（参见[5]Chap.Ⅲ）的推广（见[6]）。

根据著名的周炜良定理[7]，有以下的

引理 3 对每点$y\in I([D],\ x)$，存在$X_1,\ X_2,\ \cdots X_r\in D$及实数$t_1,t_2,\ \cdots,\ t_r$使得

$$y=\alpha_{X_r}(t_r,\ \alpha_{X_{r-1}}(t_{r-1},\ \cdots,\ \alpha_{X_2}(t_2,\ \alpha_{X_1}(t_1\ x))\cdots)),$$

再由[8]的结果（见[8]引理4.3或[9]§2）有

引理 4 对任意初态$x_0=x(0)\in M$和任意允许控制$u(t)$。设系统（1）的状态解$\pi(t,\ u,\ x_0)$在$I\subset\mathbb{R}$上定义，则$\pi(t,\ u,\ x_0)\in I([D],\ \alpha_A(t,\ x_0))$，$\forall t\in I$。

综合以上两引理即得

引理 5 $\pi(t,\ u,\ x_0)$如上，则存在$X_1,\ \cdots,X_r\in D$及实数$t_1,\cdots,\ t_r$使得$\pi(t,\ u,\ x_0)=\alpha_{X_r}(t_r,\ \alpha_{X_{r-1}},\ t_{r-1},\ \cdots,\ \alpha_{X_2}(t_2,\ \alpha_{X_1}(t_1,\ \alpha_A(t,\ x_0))\cdots))$，$\forall t\in I$。

定理 1 （可逆性必要条件） 若$[\alpha]$中有一行全为∞，则系统（1）不可逆。

证 不妨设第一行$\alpha_{11}=\alpha_{12}=\cdots=\alpha_{1p}=\infty$，即$ad_A^k B_1(c_j)=0$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ p$；$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$。则由引理2不难得到

$$c_j(\alpha_X(s,\ \alpha_A(t,\ x_0)))=c_j(\alpha_A(t,\ x_0)),\tag{6}$$

其中 $X=ad_A^k B_1$，s任意，$j=1,2,\cdots,p$；$k=0,1,2,\cdots$。

任取$x_0\in M$，选择允许控制为$u(t)=(u_1(t),0,\cdots,0)$。相应的状态解$\pi(t)$满足

$$\frac{d\pi(t)}{dt}=A(\pi(t))+u_1(t)B_1(\pi(t))。\tag{7}$$

由引理5，存在$X_1,\cdots,X_r\in D_1,D_1=\{ad_A^k B_1,\ k=0,1,2,\cdots\}$及实数$t_1,\cdots,t_r$使得

$\pi(t)=\alpha_{X_r}(t_r,\alpha_{X_{r-1}}(t_{r-1},\cdots,\alpha_{X_2}(t_2,\alpha_{X_1}(t_1,\alpha_A(t,x_0)))\cdots))$。因为$X_i\in D$，故$X_i$都是$ad_A^k B_1$形式$i=1,2,\cdots,r$。从而由（6）不难断言$y_j(t)=c_j(\pi(t))=c_j(\alpha_A(t,x_0))$，$j=1,2,\cdots p$。这表明输出与如上选择的$u(t)$无关。因而另取同类的控制$v(t)=(v_1(t),0,\cdots,0)$，则相应的输出$y_j^*(t)$必有$y_j^*(t)\equiv y_j(t)$。因而系统（1）在点$x_0$不可逆。由于$x_0$的任意性，故系统（1）不可逆。

三、可逆性的充分条件

引理 6　设$\alpha_{ij}<\infty$，则$M_{ij}=\{x\in M\mid(ad_A^{\alpha_{ij}}B_j)(c_j)(x)\neq 0\}$是$M$的稠密开子流形。

证　$\alpha_{ij}<\infty$　则由α_{ij}定义知$ad_A^{\alpha_{ij}}B_i(c_j)$是$M$上非零解析函数。再由解析函数性质结论立即得证。

引理 7　设$A,B\in V(M)$，$f\in C^\omega(M)$。如果

$ad_A{}^k B(f)=0$，$k=0,1,2,\cdots,\alpha-1$，而$ad_A{}^\alpha B(f)\neq 0$，则

$BA^k(f)=0$，$k=0,1,2,\cdots,\alpha-1$，而$BA^\alpha(f)\neq 0$。

证　由$ad_A{}^k B$的定义直接计算可得

$$ad_A{}^k B(f)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k{}^i\,(A^i BA^{k-i})(f)。$$

再由引理条件即可得证。

定理 2　（可逆性充分条件）　对系统（1）设$p\geq m$，$[\alpha]$满足以下条件

1）$[\alpha]$中每一行有不为∞的元素且它们位于不同列，为简便不妨设它们是$\alpha_{11},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{mm}$（否则只要对诸$B_i$，$c_j$做适当调换），

2）$\alpha_{jj}<\alpha_{lj}$，$l\neq j$，$j=1,2,\cdots,m$，

则系统（1）可逆。

证　由引理6及1）知$M_{ii}=\{x\in M\mid ad_A^{\alpha_{ii}}B_i(c_i)(x)\neq 0\}$是$M$的稠密开子流形，$i=1,2,\cdots,m$。从而不难证明其交$M_0=\bigcap\limits_{1\leq i\leq m}M_{ii}$也是$M$的稠密开子流形。我们证明系统（1）在$M_0$上点点可逆。

任取$x_0\in M_0$，对任意允许控制$u(t)$，相应的状态解简记为$\pi(t)$。则由$\pi(t)$的连续性及M_0是M的开集，可知存在$\varepsilon>0$使得$\pi(t)\subset M_0$，$\forall t\in[0,\varepsilon)$。从而由$M_0$定义有

$$y_j(t)=c_j(\pi(t))\neq 0,\quad \forall t\in[0,\varepsilon),\quad j=1,2,\cdots,m。$$

由引理1得$y_j(t)$一阶导数为

$$y_j{}'(t)=(A+\sum_{i=1}^{m}u_i(t)\,B_i)(c_j)(\pi(t)),\tag{8}$$

$$\forall t\in[0,\varepsilon),\ j=1,2,\cdots,m。$$

如果$\alpha_{jj}=0$，即$B_j(c_j)\neq 0$，则由条件2）知$B_i(c_j)=0$，$i\neq j$。故此时（8）式为

$$y_j{}'(t)=(A+u_j(t)B_j)(c_j)(\pi(t))。$$

如果$\alpha_{jj}>0$，即$B_j(c_j)=0$，则由条件2）知$B_i(c_j)=0$，$i=1,2,\cdots,m$。故此时（8）式为

$$y_j{}'(t)=A(c_j)(\pi(t))。$$

对此式再求导数并由条件2）可得：当 $\alpha_{ji}=1$ 时，$y_j''(t)=(A^2+u_j(t)B_jA)(c_j)(\pi(t))$；当 $\alpha_{ji}>1$ 时，$y_j''(t)=A^2(c_j)(\pi(t))$。此时再对 $y_j''(t)$ 求导数。如此重复以上讨论，最终可得

$$y_j^{(\alpha_{jj}+1)}(t)=(A^{\alpha_{jj}+1}+u_j(t)\,B_jA^{\alpha_{jj}})(c_j)(\pi(t)),\qquad (9)$$
$$\forall t\in[0,\varepsilon),\ j=1,2,\cdots,m。$$

由引理7及 α_{jj} 定义知（9）式中 $B_jA^{\alpha_{jj}}(c_j)\neq 0$。从而由 M_0 定义及 $\pi(t)\subset M_0, t\in[0,\varepsilon)$ 有

$$B_jA^{\alpha_{jj}}(c_j)(\pi(t))\neq 0,\ \ \forall t\in[0,\varepsilon),\ \ j=1,2,\cdots,m。$$

令

$$a_j(z)=\frac{1}{B_jA^{\alpha_{jj}}(c_j)(z)},\qquad (10)$$

$$b_j(z)=-a_j(z)A^{\alpha_{jj}+1}(c_j)(z),\qquad (11)$$
$$j=1,2,\cdots,m,$$

其中 $z\in M_0$（注意：由 M_0 的定义，知 $B_jA^{\alpha_{jj}}(c_j)(z)\neq 0$，$\forall z\in M_0$，故（10）在 M_0 上有定义）。显然 $a_j,b_j\in C^{\omega}(M_0)$，$j=1,2,\cdots,m$。

现在，在 M_0 上构造如下系统

$$\begin{cases}\dfrac{dz(t)}{dt}=A(z(t))+\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\Big(w_j(t)a_j(z)+b_j(z)\Big)B_j(z(t)),\\ e_j(t)=w_j(t)a_j(z)+b_j(z),\ \ j=1,2,\cdots,m,\end{cases}\qquad (12)$$

其中 $w_j(t)$ 是系统外部输入。当选取 $w_j(t)=y_j^{(\alpha_{jj}+1)}(t)$，$j=1,2,\cdots,m$ 时，由直接计算可知此时（12）的状态解正是 $\pi(t)$，$\forall t\in[0,\varepsilon)$。而输出 $e_j(t)=u_j(t)$，$\forall t\in[0,\varepsilon)$，$j=1,2,\cdots,m$。再由解析性知 $e_j(t)\equiv u_j(t)$，$\forall t\in[0,+\infty)$，$j=1,2,\cdots,m$。这表明系统（12）可利用系统（1）的输出信息（输出的适当阶导数）而重现（1）的控制 $u(t)$。由此可断言，对不同的控制 $u(t)$，$v(t)$，系统（1）的输出 $y(t,u,x_0)\neq y(t,v,x_0)$，因为否则，对于系统（12）相同的输入将产生不同的输出而不可能。定理证毕。

在以上证明中我们已同时解决了系统输入重现问题。实际上我们具体的构造了一个新系统（12），它具有重现原系统（1）的输入的能力。系统（12）称为原系统（1）的逆系统。因而又有

定理3　如果系统（1）满足定理2的条件，则在 M 的一个稠密开子流形上是可以输入重现的。

最后要特别指出：在定理2证明中我们得知，利用原系统（1）的输出信息，系统（12）的状态方程的解恰是原系统（1）的状态。因而（12）的状态方程可做为系统（1）的状态观测器。这些事实还可用来研究系统（1）的能观测性问题。我们将另文发表。

例1　设 $M=\mathbf{R}^3$。考虑 M 上的非线性系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x) + u_1(t)\, B_1(x) + u_2(t)\, B_2(x), \\ y_1 = c_1(x), \\ y_2 = c_2(x), \end{cases}$$

其中 $A, B_1, B_2 \in V(M)$, $c_1, c_2 \in C^{\omega}(M)$。具体表达式为：设 $x = (x_1 x_2 x_3) \in \mathbf{R}^3$,

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \qquad B_1(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_1(x) = e^{x_3}, \quad c_2(x) = e^{x_2}。$$

又，上述 $A(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ 的表达式是

$$A(x) = x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$B_1(x) = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad B_2(x) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

的简写（以下均采用这种简写）。

我们利用熟知的公式

$$ad_A B(x) = J_B(x) A(x) - J_A(x) B(x), \tag{13}$$

其中 $J_A(x) = \left(\dfrac{\partial a_i}{\partial x_j} \right)_x$, $A = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; $J_B(x) = \left(\dfrac{\partial b_i}{\partial x_j} \right)_x$,

$B = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$，来计算诸 α_{ij}。

1） α_{11}：由 B_1、c_1 表达式知 $B_1(c_1)(x) = 0$, $\forall x \in M$。由公式（13）得

$$ad_A B_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_2^3 \\ 0 \\ -x_2^2 \end{pmatrix}。$$

故有

$$ad_A B_1(c_1)(x) = (2x_2 - x_2^3) \frac{\partial c_1(x)}{\partial x_1} + 0 \cdot \frac{\partial c_1(x)}{\partial x_2} + (-x_2^2) \frac{\partial c_1(x)}{\partial x_3}$$

$$= -x_2^2 e^{x_3}。$$

因而 $ad_A B_1(c_1) \neq 0$，故 $\alpha_{11} = 1$, $M_{11} = \{ x \in M \mid ad_A B_1(c_1)(x) \neq 0 \} = \{ x \in M \mid x_2 \neq 0 \}$，即 M_{11} 是 $\mathbf{R}^3$ 去掉 x_1 轴与 x_3 轴决定的平面。同法可计算 α_{22} 得

$$\alpha_{22} = 0, \quad M_{22} = \{ x \in M \mid x_1 \neq 0 \}。$$

2） α_{12}: $B_1(c_2)(x)=0$, $\forall x\in M$。$ad_A B_1(c_2)(x)=(2x_2-x_2^3)\dfrac{\partial c_2(x)}{\partial x_1}$ $+0\cdot\dfrac{\partial c_2(x)}{\partial x_2}+(-x_2^2)\dfrac{\partial c_2(x)}{\partial x_3}=0$, $\forall x\in M$。由此可知 $\alpha_{12}\geq 2$。

同法可知 $\alpha_{2.1}\geq 2$。

因此〔α〕满足定理2的条件，故系统可逆。下面具体求出逆系统。首先注意，逆系统是定义在 $M_0=\bigcap_{i=1}^{2}M_{ii}$ 上。

利用公式（10）、（11）求出 a_j, b_j。由 A, B, c_i 定义算出

$$a_1(z)=\frac{1}{z_2^2e^{z_3}},\qquad a_2(z)=\frac{1}{z_1e^{z_2}},$$

$$b_1(z)=-\frac{z_1z_2+z_1^2}{z_2^2},\quad b_2(z)=-\frac{z_2}{z_1},$$

这里 $z=(z_1,z_2,z_3)\in M_0$。

因此逆系统是

$$\begin{cases}\dfrac{dz(t)}{dt}=A(z)+\left(w_1(t)\dfrac{1}{z_2^2e^{z_3}}-\dfrac{z_1z_2+z_1^2}{z_2^2}\right)B_1(z)\\ \qquad\qquad+\left(w_2(t)\dfrac{1}{z_1e^{z_2}}-\dfrac{z_2}{z_1}\right)B_2(z),\\ e_1(z)=w_1(t)\dfrac{1}{z_2e^{z_3}}-\dfrac{z_1z_3+z_1^2}{z_2^2},\\ e_2(z)=w_2(t)\dfrac{1}{z_1e^{z_2}}-\dfrac{z_2}{z_1},\end{cases}$$

其中 状态 $z\in M_0$，$w_i(t)$ 是输入，$e_i(t)$ 为输出，$i=1,2$。

例2 在 $\mathbf{R}^3$ 上考虑双线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=Ax+u_1(t)B_1x+u_2(t)B_2x,\\ y=Cx,\end{cases}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}。$$

设 C 的第一、二行分别为 c_1，c_2。

$B_1(c_1)(x)=c_1B_1(x)=x_2+x_3$。故 $B_1(c_1)\neq 0$。因而 $\alpha_{11}=0$，$M_{11}=\{x\in\mathbf{R}^3 \mid x_2+x_3\neq 0\}$。

同法得 $\alpha_{22}=0$，$M_{22}=\{x\in\mathbf{R}^3 | x_1\neq 0\}$。

由 $B_1(c_2)(x)=0$ 可知 $\alpha_{12}\geq 1$。同法又知 $\alpha_{21}\geq 1$。

故由定理 2 知系统可逆。用公式（10）、（11）求出 a_j，b_j 为：

$$a_1(z)=\frac{1}{z_2+z_3},\qquad a_2(z)=\frac{1}{z_1},$$

$$b_1(z)=-\frac{z_1+z_2+z_3}{z_2+z_3},\qquad b_2(z)=-\frac{z_2}{z_1},$$

这里 $z=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\in M_0$，$M_0=M_{11}\cap M_{22}$。

故逆系统是

$$\begin{cases}\dfrac{dz(t)}{dt}=A(z)+\left(w_1(t)\dfrac{1}{z_2+z_3}-\dfrac{z_1+z_2+z_3}{z_2+z_3}\right)B_1(z)\\ \qquad +\left(w_2(t)\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{z_2}{z_1}\right)B_2(z),\\ e_1(z)=w_1(t)\dfrac{1}{z_2+z_3}-\dfrac{z_1+z_2+z_3}{z_2+z_3},\\ e_2(z)-w_2(t)\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{z_2}{z_1},\end{cases}$$

其中　状态 $z\in M_0$、$w_i(t)$、$e_i(t)$ 分别是输入、输出函数，$i=1,2$。

参 考 文 献

〔1〕 Brockett, R. W. and Mesarovic, M. D., J. Math. Anai. Appl. **11** (1965), 548—553.

〔2〕 Silverman, L. M., IEEE Trans. Automatic Control, AC-**14** (1969), 270—276.

〔3〕 Sain, M. K. and Massey, J. L., Ibid., AC-**14** (1969), 141—149.

〔4〕 Hirschorn, R. M., SIAM J. Control anb Optim., **17** (1979), 289—297.

〔5〕 Chevalley, C., Theory of Lie Groups, Ⅰ. Princeton University Press, NJ (1946).

〔6〕 Lobry, C., SIAM J. Control, **8** (1970), 573—605。

〔7〕 Chow, W. L., Matn. Ann., **117** (1939), 98—105.

〔8〕 Sussmann, H. J. and Jurdjevic, V., J. Diff. Eq., **12** (1972), 95—116.

〔9〕 Hirschorn, R. M., SIAM J. Control and Optimization, **14** (1976), 700—711.

INVERTIBILITY OF A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS

Li Tiejun

(Nankai University, Tianjin)

Abstract

In this paper we discuss the invertibility for nonlinear systems of the form

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(x(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} x_i(t)\, B_i(x(t)) \\ y(t) = C(x(t)) \end{cases} \tag{1}$$

where $x \in M$, M is a connected real analytic manifold; $A, B_1, B_2, \cdots, B_m$ are real analytic vector fields on M; $u_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, m$ are real analytic functions from $[0, +\infty)$ into $\mathbf{R}$, we denote $u(t) = (u_1(t)), u_2(t), \cdots, u_m(t))$; C is a real analytic mapping from M into $\mathbf{R}^p$, i.e., $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \cdots, c_p(x))$, c_i, $i = 1, 2, \cdots, p$ are real analytic functions.

For any initial state $x_0 \in M$ and control function $u(t)$, we denote the output of system (1) by $y(t, u, x_0)$.

The nonlinear system (1) is invertible at $x_0 \in M$ if for any two distinct control functions $u(t)$. $v(t)$, $y(t, u, x_0) \neq y(t, v, x_0)$. (1) is invertible if there exists an open and dense submanifold M_0 of M such that (1) is invertible for all $x_0 \in M_0$.

For the system (1) we define

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}\infty & \text{if } ad_A^k B_i(c_j)=0,\quad k=0,1,2,\cdots \\ l & \text{if } ad_A^k B_i(c_j)=0,\ k=0,1,\cdots,\ l-1 \text{ and } ad_A^l B_i(c_j) \\ & \quad ad_A^l B_i(c_j)\neq 0\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,p$$

and let $[\alpha]=[\alpha_{ij}]$.

The main results of this paper are;

Theorem 1. Suppose that all elements of one row in $[\alpha]$ are ∞, then system (1) is not invertible.

Theorem 2. For system (1), suppose that $p\geq m$ and the following conditions are satisfied:

(i) In every row of $[\alpha]$ there exists elements different from ∞, locating in different columns. Without loss of generality we may assume that they are $\alpha_{11},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{mm}$,

(ii) $\alpha_{jj}<\alpha_{lj}$, $l\neq j$, $j=1,2,\cdots,n$.

Then system (1) is invertible.

For invertible systems we construct inverse systems.

By theorem 2 we obtain the result of input-recoverability.

Theorem 3. If all conditions of theorem 2 hold, then system (1) is input-recoverable on M_0, where M_0 is an open and dense submanifold of M.