第1卷 创刊号 控制理论与应用 Vol. 1, Initial Issue
1984年1月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS January, 1984

解受限最优控制问题的混合罚函数方法

陈 祖 浩

（山东大学）

摘 要

考虑的受控系统是关于控制向量 u 为线性的情形（见式(1)，(2)）。作者曾用统一的方法把外罚函数和内罚函数的概念作了扩展并用来解受限最优控制问题[7,8]。本文在这些工作上第一次直接地在连续最优控制系统中，把外罚函数和内罚函数联合起来，组成混合罚函数，以解决状态向量受限的最优控制问题。我们给出了在适当条件下带混合罚函数的最优控制问题，一定有非受限解并且在极限情形下等价于原来的受限最优控制问题。这就为使用混合罚函数方法来解连续控制系统受限最优控制问题而提供了理论基础。

自从 Russell, D.L.[1]和 Okamura, K.[2]把解受限极值的罚函数方法推广到解受限连续最优控制问题以后，不少作者都在这方面作过工作[3-8]。而这些工作都只是研究外、内罚函数的概念和性质，以及提供了单独地使用外或内罚函数方法来解决原始受限问题的理论基础。本文在作者所统一地处理和扩展了的外和内罚函数概念及方法的基础上[7,8]，首次直接地在连续最优控制系统中把外罚函数和内罚函数联合起来而提出混合罚函数方法。我们给出了在适当条件下，带混合罚函数的最优控制问题一定有非受限解并且在极限情形下等价于原受限最优控制问题，这就给出了连续最优控制系统混合罚函数方法的理论基础。这样，为解决连续系统受限最优控制问题提供了另一种方法。可看出，这种方法，在受限集 $B=B'\cap B''$，B' 不具非空内部而 B'' 则有非空内部（例如 $B=\{x|r(x)=0,\ f(x)\leq 0\}=\{x|r(x)=0\}\cap\{x|f(x)\leq 0\}$）的情形尤显出其优越性，此时不能单独使用外或内罚函数方法，但很自然地可用关于 B' 的强外罚函数和关于 B'' 的内罚函数组成的混合罚函数来消除受限集 B，见例2；此外，可以期待这种方法在实践上有可能比单独采用外罚或内罚函数方法而得到较好的收敛速度和数值性质，这在非线性规划问题中使用混合罚函数方法时就已为实践所验证了的[6]。

一、问 题 的 叙 述

我们考虑的受控系统是关于 u 为线性的情形：

$$\frac{dx}{dt}=g(t,\ x)+B(t,\ x)u, \tag{1}$$

本文于1982年12月4日收到。1983年5月11日收到修改稿。

$$J[u]=\int_{a_u}^{b_u}\{g_0(t,x)+\langle h_0(t,x),u\rangle\}dt, \tag{2}$$

此处 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是数积，$g(t,x)$ 和 $h_0(t,x)$ 分别是 n 维和 r 维向量函数，$B(t,x)$ 是 $n\times r$ 矩阵函数，$g_0(t,x)$ 是数量函数，在 $I\times O$ 上所有这些函数及 $\frac{\partial g}{\partial x}=\left\|\frac{\partial g_i(\cdot)}{\partial x^j}\right\|$，$\frac{\partial B}{\partial x}=\left\|\frac{\partial b_{ik}(\cdot)}{\partial x^j}\right\|$，$(i,j=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,r)$，均连续；$I=[a,b]$ 是 t 轴上长度有限的闭区间（$a<b$），O 是空间 R^n 内的开集，控制向量 u 的值域是空间 R^r 内的凸有界闭集U。

以下尽量采用文[7，8]的符号和定义。设 B' 和 B'' 是 O 内的闭集，记 $B=B'\cap B''$，设 B 有非空内部 $\mathring{B}$。S_1 和 S_2 是 $\mathring{B}$ 内互不相交的两个闭流形。记 $\varDelta=\{u(t)\,|\,u(t),\ t\in[a_u,b_u]\subset I$，是值域在U内的可测函数$\}$；任取定集 $D\subset O$，控制类 $\varDelta[D]\triangleq\{u(t)\,|\,u(t)\in\varDelta$，对应的组（1）的状态向量 $x(t)\in D$，$t\in[a_u,b_u]$；$x(a_u)\in S_1$，$x(b_u)\in S_2$，$x(t)\overline{\in}S$，$a_u<t<b_u$，$i=1,2\}$，函数类 $\hat{C}[D]\triangleq\{x(t)\,|\,x(t),\ t\in[a_1,b_1]\subset I$，是在 D 内取值的绝对连续向量函数，$x(a_1)\in S_1$，$x(b_1)\in S_2\}$；特别地，当 $u\in\varDelta[O]$ 时，对应的 (u,x) 或 (x,u) 称为容许对，今后假定相应的 $x(t)$，$t\in I_u=[a_u,b_u]$ 有 $\|x(t)\|\le L$，此处 L 是某个常数，$\|x\|=\left[\sum_{i=1}^{n}x^{i^2}\right]^{\frac{1}{2}}$，向量 $x=(x^1,\cdots,x^n)$。

引入记号

$$J_*\triangleq\inf_{u\in\varDelta[\mathring{B}]}J[u],\quad \mathring{J}_*\triangleq\inf_{u\in\varDelta[\mathring{B}]}J[u],\quad J_0\triangleq\inf_{u\in\varDelta[O]}J[u],$$

$$\mathring{J}'_*\triangleq\inf_{u\in\varDelta[B']}J[u],\quad J'_*\triangleq\inf_{u\in\varDelta[B']}J[u],\quad \mathring{J}''_*\triangleq\inf_{u\in\varDelta[\mathring{B}'']}J[u], \tag{3}$$

$$\mathring{J}\triangleq\inf_{u\in\varDelta[\mathring{B}'\cap\mathring{B}'']}J[u]。$$

注意到 $f_0(t,x,u)=g_0(t,x)+\langle h_0(t,x),u\rangle$ 连续，可知 $f_0(\cdot)$ 在 $I\times\{x\,|\,\|x\|\le L\}\times$U上有有限的上界 M 和下界 m，从而式(3)中的各个数 J_*、$\mathring{J}_*$、J_0、$\mathring{J}_*'$、J_*'' 和 $\mathring{J}_*''$ 都存在且为有限数。

外罚函数和内罚函数的概念按文[8]的定义1，为强调起见，称满足文[8]定义1或文[7]定义3的含义的外（内）罚函数为**关于集B**的外（内）罚函数。因此，在本文

中，设$\{p_k'(t,x,u)\}$是关于集B'的外罚函数列，$\{p_k''(t,x,u)\}$是关于集B''的内罚函数列，则$p_k'(t,x,u)$（和$p_k''(t,x,u)$）分别对应地具有下列三个性质：

1） $p_k'(\cdot)$（和$p_k''(\cdot)$）在直积$I\times O\times U$（和$I\times\mathring{B}''\times U$）上非负和连续。

2） 对任定的紧集$D\subset\mathring{B}'$（和$D\subset\mathring{B}''$），有

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{(x,u)}\int_{a_1}^{b_1}p_k'(t,x(t),u(t))dt=0\left(和\lim_{k\to+\infty}\sup_{(x,u)}\int_{a_1}^{b_1}p_k''(t,x(t),u(t))dt=0\right),\tag{4}$$

此处 $(x,u)\in\hat{C}[D]\times\Delta$，$[a_1,b_1]$是$(x,u)$的定义区间。

3） 存在某个闭集序列$\{B_k\}$，$B_k\neq B'$（和$B_k\subset\mathring{B}''$），$B_k\downarrow B'$（和$B_k\uparrow B''$），及相应的数$\delta_k>0$，使

$$\int_{a_1}^{c_1}p_k'(t,x(t),u(t))\,dt\geq\mathring{J}_*'-J_0+\rho,$$
$$\left(和\int_{a_1}^{c_1}p_k''(t,x(t),u(t))\,dt\geq\mathring{J}_*''-J_*''+\rho\right),\tag{5}$$

此处 $(x,u)\in\hat{C}[O]\times\Delta$（和$(x,u)\in\hat{C}[B'']\times\Delta$），且$x(t)\in\mathring{B}_k$，$a_1\leq t<c_1$，$b_1-a_1\geq c_1-a_1\geq\delta_k$，$x(c_1)\in\partial B_k$，及$[a_1,b_1]\subset I$是$(x,u)$的定义区间，$\rho$是一个正数。

若外罚函数定义里性质(2)中集$\mathring{B}'$换成B'，式(5)右端的$\mathring{J}_*'$换成J_*'就得关于B'的强外罚函数$p_k'(\cdot)$。现引入记号

$$J_k[u]\triangleq J[u]+\int_{a_u}^{b_u}p_k'(t,x,u)dt+\int_{a_u}^{b_u}p_k''(t,x,u)dt,\tag{6}$$

$$J_{k*}''\triangleq\inf_{u\in\Delta[B'']}J_k[u]。\tag{7}$$

注意到$J_0\leq J_{k*}''$，可见J_{k*}''存在且为有限数。

定义 1 求$u_*\in\Delta[B]$使$J[u_*]=J_*$，称关于集B的受限最优控制问题，简称问题A，相应的容许对(u_*,x_*)称为问题A的解。

定义 2 求$u_*^k\in\Delta[B'']$使$J_k[u_*^k]=J_{k*}''$，称关于集B''的最优控制A_k'',简称问题A_k''，相应的容许对(u_*^k,x_*^k)称为问题A_k''的解；若还有$u_*^k\in\Delta[\mathring{B}'']$时，称$(u_*^k,x_*^k)$是问题$A_k''$的一个非受限解。

定义 3 设 (u_*^k, x_*^k)，$a^k \leq t \leq b^k$，和 (u_*, x_*)，$a_* \leq t \leq b_*$，分别是问题 A_k'' 和问题 A 的解，若存在 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$ 的一个子序列，仍记为 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$，致使

$$\left.\begin{aligned} & a^k \to a_*,\ b^k \to b_*,\ \lim_{k\to+\infty} u_*^k = u_* \text{（弱）},\ t \in I, \\ & \lim_{k\to+\infty} \max_{t\in J} \| x_*^k(t) - x_*(t) \| = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

此处 J 是 $[a_*, b_*]$ 上的任一紧致子集，u_*^k 和 u_* 原先未定义的地方定义为 0；并致使

$$\lim_{k\to+\infty} J[u_*^k] = J[u_*], \tag{9}$$

$$\lim_{k\to+\infty} J_k[u_*^k] = J[u_*] = J_*, \tag{10}$$

则称当 $k\to+\infty$ 时问题 A_k'' 等价于问题 A，或称问题 A_k'' 当 $k\to+\infty$ 时趋于问题 A。

我们将指出，适当选择关于集 B' 的外罚函数列 $\{p_k'(\cdot)\}$ 和关于集 B'' 的内罚函数列 $\{p_k''(\cdot)\}$，就能使由外和内罚函数联合而产生的问题 A_k''，一定有非受限解，且当 $k\to+\infty$ 时问题 A_k'' 趋于关于集 $B = B' \cap B''$ 的问题。

二、主要结果

往后，我们选取的罚函数是线性地依赖于控制量 u 的，即设

$$\left.\begin{aligned} p_k'(t, x, u) &= \bar{p}_k'(t, x) + \langle q_k'(t, x), u \rangle, \\ p_k''(t, x, u) &= \bar{p}_k''(t, x) + \langle q_k''(t, x), u \rangle, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

此处 $q_k'(\cdot)$ 和 $q_k''(\cdot)$ 是 r 维向量函数，$p_k'(t, x, u)$ 和 $p_k''(t, x, u)$ 分别是关于集 B' 的外罚函数和关于集 B'' 的内罚函数，其中 $p_k'(t, x, u)$（和 $p_k''(t, x, u)$）所满足的式（5）中的数 ρ 取之使

$$\rho \geq \mathring{J}_* - \mathring{J}_*' + \bar{\rho}\ \text{（和}\ \mathring{J}_* - \mathring{J}_*'' + \bar{\rho}\text{）},\ \bar{\rho}\ \text{为大于 0 的正数，} \tag{12}$$

从而，关于 $p_k'(t, x, u)$（和 $p_k''(t, x, u)$）的性质 3）的式（5），可用下式代替：

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k'(t, x(t), u(t))dt \geq \mathring{J}_* - J_0 + \bar{\rho},$$

$$\left(\text{和} \quad \int_{a_1}^{c_1} p_k''(t, x(t), u(t))dt \geq \mathring{J}_* - J_*'' + \bar{\rho}\right), \quad \bar{\rho}\text{为大于 0 的正数。} \tag{13}$$

为使式（12）成立，只要取数 $\rho > 2\overline{M}(b-a)$即可，此处 $\overline{M} = \max(M, |m|)$，$M$ 和 m 分别是 $f_0(t, x, u) = g_0(t, x) + \langle h_0(t, x), u\rangle$ 在域 $I \times \{x \mid \|x\| \leq L\} \times U$ 上的上界和下界（参见文〔7〕的引理 2.1）。类似于文〔7〕，选取 $p_k'(t, x, u)$（和 $p_k''(t, x, u)$）使

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k'(\cdot)dt \geq 2\overline{M}(b-a) + \bar{\rho},$$

$$\left(\text{和} \quad \int_{a_1}^{c_1} p_k''(\cdot)dt \geq 2\overline{M}(b-a) + \bar{\rho}\right), \tag{14}$$

则式（5）和式（13）必成立。还可看出，关于集 B' 的强外罚函数 $p_k'(\cdot)$，若取之满足式（14），则并不需集 B' 具非空内部 $\mathring{B}'$，从而并不要求 B 有非空内部，此时可认为 S_1、S_2 是 B 内不交闭流形。

引理 1 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k'(t, x, u)\}$ 和 $\{p_k''(t, x, u)\}$ 是满足第一节中所说的性质 1）和 2）的函数列，则

$$\underline{\lim}_{k \to +\infty} J_{k*}'' \leq \overline{\lim}_{k \to +\infty} J_{k*}'' \leq \mathring{J}_*。 \tag{15}$$

证 任取 $\bar{u} \in \Delta[\mathring{B}]$，则相应的 $\bar{x}(t) \in \mathring{B}$，$t \in [\bar{a}, \bar{b}] \subset I$，故可取紧集 $D \subset \mathring{B}$，使 $\bar{x}(t) \in D$，$t \in [\bar{a}, \bar{b}]$。注意到 $\mathring{B} = \mathring{B}' \cap \mathring{B}''$，就得 $D \subset \mathring{B}'$，且 $D \subset \mathring{B}''$。于是

$$J_{k*}'' \leq J_k[\bar{u}] = J[\bar{u}] + \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} p_k'(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))dt + \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} p_k''(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))dt$$

$$\leq J[\bar{u}] + \sup_{u \in \Delta[D]} \int_{a_u}^{b_u} p_k'(t, x(t), u(t))dt + \sup_{u \in \Delta[D]} \int_{b_u}^{a_u} p_k''(t, x(t), u(t))dt。$$

注意到式（4），就得

$$\underline{\lim}_{k \to +\infty} J_{k*}'' \leq \overline{\lim}_{k \to +\infty} J_{k*}'' \leq J[\bar{u}]。$$

再注意到 $\bar{u} \in \Delta(\mathring{B})$ 的任意性，就得式（15）成立。

引理 2 设 $\Delta[B]$ 非空，则问题 A 有解（u_*，x_*）。

其证明与文〔7〕定理 3.1 完全一样。

引理 3 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k'(\cdot)\}$ 和 $\{p_k''(\cdot)\}$ 分别是上面所说的关于集 B' 的外罚函数列和关于集 B'' 的内罚函数列，则存在 $N>0$，当 $k>N$ 时，问题 A_k'' 有解 (u_*^k, x_*^k)，$t\in[a^k, b^k]$，且其解是非受限的。

证　（一）因 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，而 $\Delta[\mathring{B}]\subseteq\Delta[\mathring{B}'']$，故 $\Delta[\mathring{B}'']$ 非空，在第一节中曾指出 J_{k*}'' 是有限数，故从下确界的定义知，对每个 k，都存在容许对序列 $\{(u_i^k, x_i^k)\}$，$a_i^k\le t\le b_i^k$，$u_i^k\in\Delta[B'']$，使 $\lim\limits_{i\to+\infty} J_k[u_i^k]=J_{k*}''$。于是，从文〔1〕定理 2.1 知，$\{(u_i^k, x_i^k)\}$ 中存在子序列，仍记为 $\{(u_i^k, x_i^k)\}$，使

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{i\to+\infty} a_i^k=a^k,\quad \lim_{i\to+\infty} b_i^k=b^k,\quad \lim_{i\to+\infty} u_i^k=u_*^k\ (\text{弱}),\\ &\lim_{i\to+\infty}\max_{t\in J}\|x_i^k(t)-x_*^k(t)\|=0.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

此处 J 是 $[a^k, b^k]$ 上的任定的闭子区间，在 u^k 和 u_*^k 于 I 上的原先未定义的地方定义为 0；并且，因控制类是 $\Delta[B'']$，问题 A_k'' 是受限问题，故由文〔1〕的定理 2.1 得知：

$$\lim_{i\to+\infty} J_k[u_i^k]=J_k[u_*^k]=J_{k*}''\text{。}\tag{17}$$

（二）现在证存在正数 $N>0$，当 $k>N$ 时，$u_*^k\in\Delta[\mathring{B}'']$。事实上，对数 $\bar{\rho}>0$，从引理 1 可见，存在 $N>0$，当 $k>N$ 时有 $J_k[u_*^k]=J_{k*}''<\mathring{J}_*+\bar{\rho}$。另方面，设 $u_*^k\,\overline{\in}\,[\mathring{B}'']$，$a_k\le t\le b^k$，则因 $x_*^k(a^k)\in S_1\subset\mathring{B}''$，故存在某时刻 c^k，$a^k<c^k\le b^k$，使 $x_*^k(c^k)\in\partial B''$，而当 $a^k\le t<c^k$ 时，$x_*^k(t)\in\mathring{B}''$。于是，从式（13）可见

$$\begin{aligned}J_k[u_*^k]&=J[u_*^k]+\int_{a^k}^{b^k}p_k'(t, x_*^k(t), u_*^k(t))dt+\int_{a^k}^{b^k}p_k''(t, x_*^k(t), u_*^k(t))dt\\ &\ge J[u_*^k]+\int_{a^k}^{c^k}p_k''(t, x_*^k(t), u_*^k(t))dt\ge J_*''+(\mathring{J}_*-J_*''+\bar{\rho})\\ &=\mathring{J}_*+\bar{\rho}\text{。}\end{aligned}$$

这样得到矛盾，矛盾证实了：当 $k>N$ 时，$u_*^k\in\Delta[\mathring{B}'']$。因此，当 $k>N$ 时，$\{(u_*^k, x_*^k)\}$，$a^k\le t\le b^k$，是问题 A_k'' 的非受限解。重新编号，可认为 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$，$a^k\le t\le b^k$，$k=1, 2, \cdots$，就是问题 A_k'' 的非受限解。

下面我们将推出，用关于集 B' 的外罚函数列 $\{p_k'(\cdot)\}$ 和关于集 B'' 的内罚函数列 $\{p_k''(\cdot)\}$ 所组成的混合函数列而构成的问题 A_k'' 之收敛性的主要结果。

定理 1 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k'(\cdot)\}$ 和 $\{p_k''(\cdot)\}$ 是满足式(13)的分别关于集 B' 的外罚函数列和关于集 B'' 内罚函数列，(u_*^k, x_*^k)，$a^k\le t\le b^k$，是问题 A_k''，$k=1, 2, \cdots$，的解。则序列 $\{u_*^k\}$ 中的任一个在 $L_2[I]$ 意义下的弱收敛子序列，仍记为 $\{u_*^k\}$，其极限记为 u_*，$a_*\le t\le b_*$，必致使下列诸结论成立：

〈1〉
$$\left.\begin{aligned} &a^k\to a_*,\quad b^k\to b_*,\quad u_*^k\to u_*\ (\text{弱}),\quad t\in I,\\ &\lim_{k\to+\infty}\max_{t\in J}\|x_*^k(t)-x_*(t)\|=0,\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

此处 $x_*(t)$，$a_*\le t\le d_*$，是对应于 u_* 的系统(1)的解，J 是 I 上的任定闭子区间，u_*^k 与 x_* 在 I 上原先未定义的地方定义为 0。

〈2〉 (u_*, x_*) 构成容许对，$u_*\in\Delta[B]$。

〈3〉
$$\lim_{k\to+\infty} J[u_*^k]=J[u_*]。\tag{19}$$

证 (一)从引理 3 可见 $u_*^k\in\Delta[B'']$，故 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$，$a^k\le t\le b^k$，是容许对序列，再注意到关于系统(1)的一切解均有共同上界($\|x(t)\|\le L$)的假定，以及系统(1)和 $p_k'(\cdot)$、$p_k''(\cdot)$ 关于 u 是线性的形式，应用文[1]定理 2.1 就得知：$\{u_*^k\}$ 中必存在弱收敛的子序列，仍记为 $\{u_*^k\}$，其极限记为 u_*，它们之间满足(18)的关系式。

(二)因 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$ 是容许对序列及从式(18)就知 $x_*(t)$ 必满足边界条件 $x_*(a_*)\in S_1$ 和 $x_*(b_*)\in S_2$。再注意到 $u_*^k\in\Delta[B'']$，B'' 是闭集，故从文[1]定理 2.1 知：$u_*\in\Delta[B'']$，(u_*, x_*) 是容许对且式(19)成立。

(三)现在证 $u_*\in\Delta[B]$。

首先，从关于集 B' 的外罚函数列 $\{p_k'(\cdot)\}$ 的性质(3)得知，存在闭集序列 $\{B_k\}$，$B_k\ne B'$，$B_k\downarrow B'$，使式(13)成立。我们要指出，存在数 $N_1>0$，当 $k>N_1$ 时，相应于这闭集序列中的 B_k 使 $x_*^k(t)\in\mathring{B}_k$，$a^k\le t\le b^k$。

事实上，注意到式(17)，则对于式(13)中的数 $\bar{\rho}>0$，从引理 1 可见，存在整数 $N_1>0$，使当 $k>N_1$ 时有

$$J_k[u_*^k]=J_{k*}''<\mathring{J}_*+\bar{\rho}。\tag{20}$$

另方面，设 $x_*^k(t)$，$a^k\le t\le b^k$，不整个在 $\mathring{B}_k$ 内，则从 $x^k(a^k)\in B\subset B'\subset B_k$，$k=1,2,\cdots$，可见存在某时刻 $c^k(a^k<c^k\le b^k)$，使 $x_*^k(c^k)\in\partial B_k$，而当 $a^k\le t<c^k$ 时，$x_*^k(t)\in\mathring{B}_k$。于是从式（13）可见

$$J_k[u_*^k]\ge J[u_*^k]+\int_{a^k}^{c^k}p_k'(t,x_*^k(t),u_*^k(t))dt+\int_{a^k}^{c^k}p_k''(t,x_*^k(t),u_*^k(t))dt$$

$$\ge J[u_*^k]+\int_{a^k}^{c^k}p_k'(t,x_*^k(t),u_*^k(t))dt$$

$$\ge J_0+(\mathring{J}_*-J_0+\bar{\rho})=\mathring{J}_*+\bar{\rho},$$

这与式（20）相矛盾。故对 $k>N_1$ 必有 $x_*^k(t)\in\mathring{B}$，$a^k\le t\le b^k$。

其次，从 $B_k\downarrow B'$ 可见，对任定的 $k>N_1$，均有 $x_*^{k+j}(t)\in\mathring{B}_{k+j}\subset\mathring{B}_k$，$j=1,2,\cdots$。注意到式（18）及 B_k 是闭集，令 $j\to+\infty$ 就得：对任定的 $k>N_1$ 有 $x_*(t)\in B_k$，$a_*\le t\le b_*$。从而

$$x_*(t)\in\bigcap_{k=N_1+1}^{\infty}B_k=B',\quad a_*\le t\le b_*。\tag{21}$$

这样就得证 $u_*\in\Delta[B']$，$a_*\le t\le b_*$。

再从（二）已知 $u_*\in\Delta[B'']$，故得

$$u_*\in\Delta[B'\cap B'']=\Delta[B],\quad a_*\le t\le b_*。$$

从而（u_*，x_*）是属于 $u_*\in\Delta[B]$ 的容许对。定理完全得证。

定理 2　设 $\Delta[\mathring{B}'\cap\mathring{B}'']$ 非空，$\{p_k'(t,x,u)\}$ 和 $\{p_k''(t,x,u)\}$ 分别是满足式（13）的关于集 B' 的外罚函数列和关于集 B'' 的内罚函数列，则或 1）问题 A 有从 $\mathring{B}$ 内趋近的解，或 2）$\mathring{J}_*=J_*$，是当 $k\to+\infty$ 时问题 A_k'' 等价于问题 A 的充分条件。

证　关于“问题 A 有从 $\mathring{B}$ 内趋近的解”的概念见文〔7，8〕，且从该文可见：条件 1）与条件 2）是等价的。故我们只要考虑其中的一个条件，例如条件 $\mathring{J}_*=J_*$，看它是否充分即可。

设（u_*^k，x_*^k），$a^k\le t\le b^k$，是问题 A_k'' 的一个解，即 $J_k[u_*^k]=J_{k*}''$，$k=1,2,\cdots$。从定理 1 知，$\{(u_*^k,x_*^k)\}$ 中存在子序列，仍记为 $\{(u_*^k,x_*^k)\}$，及存在容许对（u_*，x_*），$a_*\le t\le b_*$，满足定理 1 中的结论〈1〉、〈2〉和〈3〉；特别地从结论〈3〉知，$J_*\le J[u_*]$；又注意到 $p_k'(\cdot)$ 和 $p_k''(\cdot)$ 非负以及引理 1 的式（15），就得下面的关系式

$$J_* \le J[u_*] \le \varliminf_{k\to+\infty} J_k[u_*^k] \le \varlimsup_{k\to+\infty} J_k[u_*^k] \le \mathring{J}_* 。\tag{22}$$

由此，从已设条件 $\mathring{J}_* = J_*$，就得

$$\lim_{k\to+\infty} J_k[u_*^k] = J[u_*] = J_* 。\tag{23}$$

综合上述，按定义4，即得证：当 $k\to+\infty$ 时，问题 A_k'' 等价于问题 A。

定理 3 设上一定理的诸假设条件成立，则问题 A_k'' 的任一解 $(u_*^k,\ x_*^k)$，$k=1,2,\cdots$，所组成的解序列 $\{(u_*^k,\ x_*^k)\}$，$a^k \le t \le b^k$ 之中，序列 $\{u_*^k\}$ 的任一个弱收敛子序列的极限 u_*，$a_* \le t \le b_*$，致使容许对 $(u_*(t),\ x_*(t))$，$a_* \le t \le b_*$，是问题 A 的解。

证 这定理只是定理2的直接推论和明显说法而已。事实上，仔细考察各引理、定理1和定理2的证明过程可见，对问题 A_k'' 的解 $(u_*^k,\ x_*^k)$ 是可任取的，而对 $\{u_*^k\}$ 的任一个弱收敛子序列及其极限 u_*，定理1和定理2仍然成立。因此 $u_* \in \Delta[B]$ 及 $J[u_*]=J_*$，故 $(u_*,\ x_*)$ 是容许对且 $u_* \in \Delta[B]$ 及 $J[u_*]=J_*$，故 $(u_*,\ x_*)$ 是问题 A 的解。

注 上面各定理中的关于集 B' 的外罚函数列 $\{p_k'(\cdot)\}$ 也可以用强外罚函数列，这时若 B' 不具非空内部时，则上文从式(13)起，凡遇数 $\mathring{J}_*$ 换成 $\mathring{J}$，集 $\mathring{B}$ 换成 $B'\cap\mathring{B}''$ 即可；当系统右端及罚函数关于 t 为可测函数的情形，以及系统和罚函数是关于 u 为非线性的情形，则在解决了问题 A 及问题 A_k'' 的解的存在性以后，也可得到类似的混合罚函数方法的有关定理。

三、例

例1 设所给集 $B' \triangleq \{x \mid g_l'(x)\le 0,\ l=1,\cdots,m_1\}$ 和 $B'' \triangleq \{x \mid g_s''(x)\le 0,\ s=1,\cdots,m_2\}$，$g_l'(x)$ 和 $g_s''(x)$ 是 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 的 $C^{(1)}$ 类函数，记 $g'(x)=\max\limits_l\{g_l'(x)\}$，$g''(x)=\max\limits_s\{g_s''(x)\}$，于是集 B' 和集 B'' 分别是由满足约束 $g'(x)\le 0$ 和 $g''(x)\le 0$ 的 x 点所组成。又设 $O=R^n$，并取

$$p_k'(t,x,u)=\begin{cases}\dfrac{Rk}{2d_k'}g', & \text{当 } 0\le g'\le \dfrac{2}{k} \text{ 时，}\\[2mm] -\dfrac{Rk}{2d_k'}\left(g'-\dfrac{4}{k}\right), & \text{当 } \dfrac{2}{k}\le g'\le\dfrac{4}{k} \text{ 时，}\\[2mm] 0, & \text{对其余的 } g'，\end{cases}\tag{24}$$

其中 d_k' 是曲面 $g'(x)=\frac{1}{k}$ 与曲面 $g'(x)=\frac{3}{k}$ 之间的距离，又取

$$p_k''(t,x,u)=\begin{cases}\dfrac{Rk}{2d_k''}\left(g''+\dfrac{4}{k}\right), & \text{当}-\dfrac{4}{k}\leq g''\leq-\dfrac{2}{k},\\ -\dfrac{Rk}{2d_k''}g'', & \text{当}-\dfrac{2}{k}\leq g''\leq 0,\\ 0, & \text{其余的}\ g'',\end{cases}\tag{25}$$

此处 d_k'' 是曲面 $g''(x)=-\frac{1}{k}$ 与 $g''(x)=\frac{3}{k}$ 之间的距离；式（24）和（25）中的 R 是某个常数（参见文〔7〕的例）。于是，类似文〔7〕的§6所指出的，$\{p_k'(\cdot)\}$ 是关于集 B' 的外罚函数列，而 $\{p_k''(\cdot)\}$ 是关于集 B'' 的内罚函数列。若 $\mathring{B}=\{x|g_l'(x)<0,\ g_s''(x)<0,\ l=1,\cdots,m_1;\ s=1,\cdots,m_2\}$ 非空，则上面所设计的 $\{p_k'(\cdot)\}$ 和 $\{p_k''(\cdot)\}$，就可用作为解决关于集 $B=B'\cap B''=\{x|g_l'(x)\leq 0,\ g_s''(x)\leq 0,\ l=1,\cdots,m_1;\ s=1,\cdots,m_2\}$ 的受限最优控制问题 A 的混合罚函数列，而使求问题 A 的解的问题转化为问题 A_k'' 的解的问题；而问题 A_k'' 则据引理3，实际上就是求泛函 $J_k[u]=J[u]+\int_{a_u}^{b_u}p_k'(\cdot)dt+\int_{a_u}^{b_u}p_k''(\cdot)dt$ 关于集 $\mathring{B}''$ 的非受限最优控制问题。

例2　给受限集 $B=B'\cap B''$，其中 $B'\triangleq\{x|r_l(x)=0,\ l=1,\cdots,m_1\}$，$r_l(x)$ 是 $C^{(1)}$ 类函数，B'' 仍取例1中所示之集。注意到集 B' 不具有非空内部即知 B 也不具有非空内部，故关于集 B 的内和外罚函数都不存在(按定义必须 $\mathring{B}$ 非空)，从而无法单独采用内罚或外罚函数方法。但分别地关于 B' 的强外罚函数和关于 B'' 的内罚函数却是能够找到的，因而在这种情形下采用混合罚函数方法是很自然的和有效的。这时，为了消除集 B'' 的约束，取关于集 B'' 的内罚函数仍如例1式（25）所示；而为消除集 B' 的约束，则可取

$$p_k'(t,x,u)=\frac{2R(m_1+1)k^2\sum\limits_{l=1}^{m_1}[r_l(x)]^2}{\delta_k\left\{1+k^2\sum\limits_{l=1}^{m_1}[r_l(x)]^2\right\}},\tag{26}$$

此处 R 与例1中的相同，δ_k 取为曲面 ∂B_k 与 ∂D_k 之间的距离，$B_k\triangleq\{x|-\frac{1}{k}\leq r_l(x)$

$\leq \frac{1}{k}$，$l=1,\cdots,m_1\}$和$D_k \triangleq \{x \mid -\frac{1}{2k} \leq r_l(x) \leq \frac{1}{2k}$，$l=1,\cdots,m_1\}$；则可验得：对足够大的$k$，$\widetilde{p}_k'(t,x,u)$是关于集$B'$的强外罚函数。从而可由$p_k'(\cdot)$和$p_k''(\cdot)$作出关于集$B$的混合罚函数$p_k(\cdot)=p_k'(\cdot)+p_k''(\cdot)$，来求解原问题$A$。

参考文献

〔1〕 Russell, D. L., Penalty Functions and Bounded Phase Coordinate Control, SIAM J. Control **2**, 3(1965), 409—422.

〔2〕 Okamura, K., Some Mathematical Theory of Penalty Method for Solving Optimum Control Problems, SIAM J. Control, **2**, 3(1965), 317—331.

〔3〕 Cullum, J., Penalty Functions and Nonconvex Continuous Optimal Control Problems, in Computing Methods in Optimization Problems-2 (Zadeh, L. A., Neustadt, L. W. and Balakrishnan, A. V., eds), Academic Press, New York and London (1969), 55—67.

〔4〕 Balakrishnan, A. V., On a New Computing Technique in Optimal Control, SIAM J. Control **6**, 2(1968), 149—173.

〔5〕 Polak. E., Computational Methods in Optimization, Academic Press, New York and London (1971), 204—209.

〔6〕 陈祖浩，罚函数方法解最优控制问题的数学理论，全国控制理论及其应用学术交流会论文集，科学出版社(1981)，204—209。

〔7〕 陈祖浩，最优过程罚函数方法的数学理论，数学年刊，**3**，3(1982)，329—342。

〔8〕 Chen Zuhao, The Optimal Control Problems of Bounded Phase Coordinate and Penalty Function Methods, 1981年中美控制系统学术会议论文集，科学出版社(1981)，520—529。