第1卷 第2期
1984年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 1. No.2
April, 1984

生态系统时变参数估计的一种方法

周勤学　冯　茜　丘兆福

（中山大学）

摘　要

本文以水生动植物系统为例，讨论了生态系统时变参数的估计，把时变参数的估计问题转化为最优控制问题，给出了一种拟最优化算法，该方法在微型机上进行模拟计算已获得较满意的结果。

一、实际背景和问题的提法

生态系统与人类生活息息相关，人们对生态系统的研究在不断深入，仅用传统的简单工具，进行文字、图表的定性描述方法，已不能适应当前的需要。不少学者已应用系统分析方法对生态系统进行分析和综合。这种方法，通常是在对生态系统的定性认识的基础上，对生态系统中的能量转换和物质循环进行定量的观测，建立生态系统的数学模型，再根据生态系统的数学模型，研究系统中某一种或几种生物种群数量消长对生态系统平衡的影响；研究在人的干预（控制）下，生态系统可能产生的演替；等等，为自然资源的合理开发利用和最优管理提供可靠的科学依据。因此，建立生态系统数学模型的工作已经成为研究生态系统的重要一环。

由于许多生态系统的演化过程十分缓慢，采集数据比较困难，因而所得数据个数很有限，采样间隔较长，参数一般都有明确的生态学意义，而且某些参数是随时间发生周期性变化的。生态系统的这些特点，使得现有的参数估计方法难以奏效。1978年G. Di Cola等人[1]曾给出了一种生态系统参数估计方法，但只适合时不变参数的估计问题，而且要求有较多的数据。这里我们以G. Di Cola等人曾讨论过的系统（如图1）为例，但某些参数是时变的。

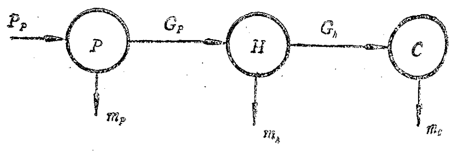

图1　某水域水生动植物的分室模型

图1表示某水域水生动植物的分室模型。系统分为三个分室：第一分室P是水生植物，是营养的生产者；第二分室H是食草类动物；第三分室C是食肉类动物。H和C是营养的消费者。P_P表示供给P的太阳能

本文于1983年3月2日收到，1983年8月18日收到修改稿。

及其他营养素的单位时间变化率；G_p 表示供给 H 的牧食率；G_h 表示供给 C 的捕食率。m_p、m_h 和 m_c 分别表示 P、H 和 C 的沉积、呼吸、排泄和死亡率。

由图1，可建立如下的一阶微分方程组作为该系统的数学模型

$$\begin{cases} \dot{P} = P\,[P_p(1-\sigma P) - m_p - G_p H/(1+\sigma_p P)], \\ \dot{H} = H\,[G_p P/(1+\sigma_p P) - m_h - G_h C/(1+\sigma_h H)], \\ \dot{C} = C\,[G_h H/(1+\sigma_h H) - m_c], \\ \quad 0 \leq t \leq T, \\ P(0) = P^0,\ H(0) = H^0,\ C(0) = C^0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $P_p(1-\sigma P)$ 表示 P 的自然增长率；$1/(1+\sigma_p P)$ 表示牧食系数，$G_p P/(1+\sigma_p P)$ 是 H 的自然增长率；$1/(1+\sigma_h H)$ 表示被捕食系数，$G_h H/(1+\sigma_h H)$ 是 C 的自然增长率。σ、σ_p 和 σ_h 是待定常数；m_p、m_h 和 m_c 也可看作常数，易由实验测定；P_p、G_p 和 G_h 是时变参数，是难以测定的。

一般地，生态系统的参数（包括时变和时不变）估计问题可表述如下：

已知系统的模型结构为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t;\ \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \quad t \in [t_0, T],\ \mathbf{x} \in (R^n)^+,\ \mathbf{u} \in V \subset R^m, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\mathbf{x}$ 是 n 维向量，表示生态系统中各分室（或群落、种群）的生物量密度；函数结构 $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_n)^T$ 由具体系统给定；$\mathbf{u}$ 是 m 维向量，表示待估计的参数（包括时变和时不变参数），V 是参数集合，在 V 上系统是结构稳定的[2]。在 $(R^n)^+$ 上，系统满足解存在唯一性定理条件。

假定在时间区间 $[t_0, T]$ 上，分别在 t_0，t_1，t_2，…，t_N（$=T$）时刻采集到 $N+1$ 组数据：$\overline{\mathbf{x}}(t_0)$，$\overline{\mathbf{x}}(t_1)$，$\overline{\mathbf{x}}(t_2)$，…，$\overline{\mathbf{x}}(t_N)$。

我们的问题是要根据这 $N+1$ 组数据估计模型（2）中的参数向量 $\mathbf{u}$。

二、解决问题的方法

要对参数向量 $\mathbf{u}$ 作出估计，必须给出一个准则。我们仍采用通常的最小二乘法准则，即把参数估计值代入模型（2），求得 $\mathbf{x}(t_i, \mathbf{u})$ $(i=1, 2, \cdots, N)$，应使损失函数

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{x}(t_i, \mathbf{u}) - \overline{\mathbf{x}}(t_i)\|^2 \tag{3}$$

达到极小。

我们把模型（2）看作系统的状态方程，把 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{u}$ 分别看作状态向量和控制向量，把（3）看作目标泛函，并给定初始条件

$$\mathbf{x}(t_0)=\overline{\mathbf{x}}(t_0)。 \tag{4}$$

于是，我们的参数估计问题就可以转化为求出一个适合（2）和（4）并使（3）达到极小的最优控制 $\mathbf{u}^*$ 的最优控制问题。

由于泛函指标 $J(\mathbf{u})$ 是离散的，自然想到用离散动态规划方法来求解。按采样时刻，将区间 $[t_0, T]$ 分成 N 个子区间：$[t_i, t_{i+1})$，$i=0, 1, \cdots, N-1$；在每一子区间 $[t_i, t_{i+1})$ 上，控制向量用 $\mathbf{u}(i)$ 表示。考虑到生态系统的特点，$\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$ 较长，为了保证解有较高的精度，在各个子区间上我们用差分方程取代微分方程（2），而直接用数值方法求解微分方程。步骤如下：

第一步：在区间 $[t_{N-1}, T]$ 上，以 $\mathbf{x}(t_{N-1})$ 为初始值，解方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(t;\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}(N-1)),$$

求得 $\mathbf{x}(T)$。显然 $\mathbf{x}(T)$ 依赖于 $\mathbf{x}(t_{N-1})$ 和 $\mathbf{u}(N-1)$，故记为

$$\mathbf{x}(T)=\hat{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_{N-1}),\ \mathbf{u}(N-1)]。$$

现要寻找使

$$J_{N-1}=\|\mathbf{x}(T)-\overline{\mathbf{x}}(T)\|^2=\|\hat{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_{N-1}), \mathbf{u}(N-1)]-\overline{\mathbf{x}}(T)\|^2$$

取极小值的 $\mathbf{u}^*(N-1)$。即

$$S_{N-1}=\min_{\mathbf{u}(N-1)} J_{N-1}=\min_{\mathbf{u}(N-1)}\|\hat{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_{N-1}),\ \mathbf{u}(N-1)]-\overline{\mathbf{x}}(T)\|^2。 \tag{5}$$

求（5）的极小值点得 $\mathbf{u}^*(N-1)$。显然 $\mathbf{u}^*(N-1)$ 依赖于 $\mathbf{x}(t_{N-1})$，记 $\mathbf{u}^*(N-1)=\mathbf{u}^*[\mathbf{x}(t_{N-1})]$。然后把 $\mathbf{u}^*(N-1)$ 代入（5），便求得 S_{N-1}，它只依赖于 $\mathbf{x}(t_{N-1})$，记作

$$S_{N-1}=S_{N-1}[\mathbf{x}(t_{N-1})]。$$

第二步：考虑区间 $[t_{N-2}, T]$，以 $\mathbf{x}(t_{N-2})$ 为初始值，解方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(t;\mathbf{x},\mathbf{u}(N-2)),$$

求得

$$\mathbf{x}(t_{N-1})=\hat{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_{N-2}),\ \mathbf{u}(N-2)]。 \tag{6}$$

现要寻找 $\mathbf{u}^*(N-2)$，$\mathbf{u}^*(N-2)$ 与 $\mathbf{u}^*(N-1)$ 一起，使

$$\begin{aligned} J_{N-2}&=\|\mathbf{x}(t_{N-1})-\overline{\mathbf{x}}(t_{N-1})\|^2+\|\mathbf{x}(T)-\overline{\mathbf{x}}(T)\|^2\\ &=\|\hat{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_{N-2}),\ \mathbf{u}(N-2)]-\overline{\mathbf{x}}(t_{N-1})\|^2+J_{N-1}\end{aligned}$$

取极小值。即

$$S_{N-2}=\min_{\substack{\mathbf{u}(N-2)\\ \mathbf{u}^*(N-1)}} J_{N-2}=\min_{\substack{\mathbf{u}(N-2)\\ \mathbf{u}^*(N-1)}}\{\|\hat{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_{N-2}),\ \mathbf{u}(N-2)]-\overline{\mathbf{x}}(t_{N-1})\|^2+J_{N-1}\}。$$

由于上式右端大括号下的第一项与 $\mathbf{u}^*(N-1)$ 无关，故有

$$S_{N-2}=\min_{\substack{u(N-2)\\ u^*(N-1)}} J_{N-2}=\min_{u(N-2)}\{\|\hat{x}[x(t_{N-2}),\ u(N-2)]-\bar{x}(t_{N-1})\|^2$$

$$+\min J_{N-1}\}=\min_{u(N-2)}\{\|\hat{x}[x(t_{N-2}),\ u(N-2)]-\bar{x}(t_{N-1})\|^2$$

$$+S_{N-1}[x(t_{N-1})]\}. \tag{7}$$

把(6)代入(7)得

$$S_{N-2}=\min\{\|\hat{x}[x(t_{N-2}),\ u(N-2)]-\bar{x}(t_{N-1})\|^2+S_{N-1}[\hat{x}(t_{N-2}),u(N-2)]\}. \tag{8}$$

由(8)便可求得 $u^*(N-2)$，它依赖于 $x(t_{N-2})$，记 $u^*(N-2)=u^*[x(t_{N-2})]$。再把 $u^*(N-2)$代入(8)，便可求得 S_{N-2}，它是 $x(t_{N-2})$的函数，记作

$$S_{N-2}=S_{N-2}[x(t_{N-2})].$$

依此类推，可得递推公式

$$\begin{cases} S_{N-j}[x(t_{N-j})]=\min\limits_{u(N-j)}\{\|\hat{x}[x(t_{N-j}),u(N-j)]-\bar{x}(_{N-j+1})\|^2 \\ \qquad\qquad +S_{N-j+1}[\bar{x}[x(t_{N-j}),\ u(N-j)]]\}, \\ u^*(N-j)=u^*[x(t_{N-j})], \\ \qquad j=1,2,\cdots,N;\ 且\ S_N=0. \end{cases} \tag{9}$$

于是整个求解过程可如下进行：

1° 由递推公式(9)，并经过反复迭代，求出

$$\begin{cases} u^*(N-1)=u^*[x(t_{N-1})],\ \cdots, \\ S_{N-1}[x(t_{N-1})]\qquad ,\ \cdots, \end{cases}\qquad \begin{cases} u^*(0)=u^*[x(t_0)]. \\ S_0[x(t_0)]. \end{cases}$$

2° 由于$x(t_0)=\bar{x}(t_0)$已知，故可求得 $u^*(0)=u^*[x(t_0)]$，同时求出$S_0[x(t_0)]$。

3° 由 $x(t_0)$及 $u^*(0)$求出 $x(t_1)=\hat{x}[x(t_0),\ u(0)]$，$u^*(1)=u^*[x(t_1)]$和 $S_1[x(t_1)]$。

4° 依此类推，便可求得 $u^*(2)$，…，$u^*(N-1)$。这就是参数向量 u 在各 t_i 时刻的最优值，$i=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$。

事实上，完全按照上述步骤确定 $u^*(i-j)$，计算工作量是非常大的。为了减少计算量，以便于实际应用，下面我们把上述步骤加以简化，给出一种容易实现的拟最优化方法。具体步骤如下：

1° 在区间$[t_{N-1},\ T]$上，直接取 $x(t_{N-1})=\bar{x}(t_{N-1})$为初始值，解方程

$$\dot{x}=f(t;\ x,\ u(N-1)),$$

得

$$x(T)=x[u(N-1)].$$

由

$$J_{N-1}=\|\mathrm{x}(T)-\bar{\mathrm{x}}(T)\|^2=\|\mathrm{x}[\mathrm{u}(N-1)]-\bar{\mathrm{x}}(T)\|^2$$

关于 $\mathrm{u}(N-1)$ 取极小值确定 $\mathrm{u}(N-1)=\tilde{\mathrm{u}}^*(N-1)$。

2° 考虑区间 $[t_{N-2}, T]$，在 $[t_{N-2}, t_{N-1})$ 上直接取 $\mathrm{x}(t_{N-2})=\bar{\mathrm{x}}(t_{N-2})$ 为初始值，解方程

$$\dot{\mathrm{x}}=f(t;\ \mathrm{x},\ \mathrm{u}(N-2)),$$

得

$$\mathrm{x}=(t_{N-1})=\mathrm{x}[\mathrm{u}(N-2)]。$$

然后在区间 $[t_{N-1}, T]$ 上，以 $\mathrm{x}(t_{N-1})=\mathrm{x}[\mathrm{u}(N-2)]$ 为初始值，求解方程

$$\dot{\mathrm{x}}=f(t;\ \mathrm{x},\tilde{\mathrm{u}}^*(N-1)),$$

得

$$\tilde{\mathrm{x}}(T)=\tilde{\mathrm{x}}[\mathrm{u}(N-2)]。$$

由

$$\begin{aligned}J_{N-2}&=\|\mathrm{x}(t_{N-1})-\bar{\mathrm{x}}(t_{N-1})\|^2+\|\tilde{\mathrm{x}}(T)-\bar{\mathrm{x}}(T)\|^2\\&=\|\mathrm{x}[\mathrm{u}(N-2)]-\bar{\mathrm{x}}(t_{N-1})\|^2+\|\tilde{\mathrm{x}}[\mathrm{u}(N-2)]-\bar{\mathrm{x}}(T)\|^2\end{aligned}$$

关于 $\mathrm{u}(N-2)$ 取极小值确定 $\tilde{\mathrm{u}}^*(N-2)$。

依此类推，在确定 $\tilde{\mathrm{u}}^*(N-1),\cdots,\ \tilde{\mathrm{u}}^*(N-j)$ 之后，再往前确定 $\tilde{\mathrm{u}}^*(N-j-1)$，直到 $\tilde{\mathrm{u}}^*(0)$ 被确定为止。这样便得到参数向量 u 在各 t_i 时刻的次优值，$i=0,1,\cdots,N-1$。我们就用 u 的次优值来近似它的最优值。

这种简化处理，问题主要在于：在 1° 中，我们是以 $\mathrm{x}(t_{N-1})=\bar{\mathrm{x}}(t_{N-1})$ 作为初始值求得最优值 $\tilde{\mathrm{u}}^*(N-1)$，但在 2° 中，$\mathrm{x}(t_{N-1})=\mathrm{x}[\mathrm{u}(N-2)]$ 与 $\bar{\mathrm{x}}(t_{N-1})$ 是有差别的。由于初始值不同，在 1° 中 $\tilde{\mathrm{u}}^*(N-1)$ 是最优的，而在 2° 中就不一定是最优的了。但如所设，系统（2）是结构稳定的，因而是稳定的。根据微分方程的解对于初始值的连续依赖性[3]，只要 $\bar{\mathrm{x}}(t_{N-1})$ 与 $\mathrm{x}[\mathrm{u}(N-2)]$ 的差别足够小，在 $\mathrm{u}(N-1)=\tilde{\mathrm{u}}^*(N-1)$ 作用下，分别以 $\bar{\mathrm{x}}(t_{N-1})$ 与 $\mathrm{x}[\mathrm{u}(N-2)]$ 作为初始值所得到的解轨线在区间 $[t_{N-1},T]$ 上就可以充分靠近，从而泛函指标值也可以充分接近。在这种情况下，就可把 $\tilde{\mathrm{u}}^*(N-1)$ 近似当作最优值。这样做虽然会使参数的估计精度有所降低，但计算工作量却大大减少了。如果我们要求出参数 $\mathrm{u}(t)$ 在 $t_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1)$ 时刻的 N 个估计值，用拟最优化方法的计算工作量定为 N 个单位时间的话，则完全按动态规划方法计算约需 2^{N-1} 个单位时间，计算工作量之大简直是不可思议的。由此看来，拟最优化算法似乎是可取的。

最后，根据求得的 $\tilde{\mathrm{u}}^*(0),\ \tilde{\mathrm{u}}^*(1),\cdots,\ \tilde{\mathrm{u}}^*(N-1)$ 这 N 组数据，用回归方法，把 u

表为时间 t 的函数，这就得到我们所估计的生态系统的时变参数。

在生态系统中，不同类别的种群数量往往处于不同的数量级，为了使各种群（分室、群落）相应的参数有大体相同的估计精度，在损失函数（3）中一般都要乘一个权因子。这样（3）可写为(3)′

$$J'(\mathbf{u})=\sum_{i=1}^{N}[\mathbf{x}(t_i)-\bar{\mathbf{x}}(t_i)]^T\mathbf{W}[\mathbf{x}(t_i)-\bar{\mathbf{x}}(t_i)], \qquad (3)'$$

其中 $\mathbf{W}$ 是加权矩阵。用（3）′ 作损失函数的计算过程与（3）是一样的。

系统参数估计出来以后，还应该进行检验。首先，要进行原理性检验，即在所给参数下，系统是否有生态学意义。例如在所给参数下，解 $\mathbf{x}$ 出现负值就不符合生态学原理，这可能是模型结构选得不合理或者计算过程有错误，应该重新调整模型结构或检查计算过程，重新进行计算。其次，要进行实际检验，看由模型计算的结果与重新测量的数据是否比较吻合，否则就要重新修改模型直到满意为止。

我们的这个方法，原则上不管系统未知参数有多少个，观测数据个数与参数个数无关，数据个数可以少于未知参数个数，采样间隔也可以不均匀。观测数据的个数主要取决于参数时变的程度。因为在我们的方法中，在两个相邻采样时刻之间，是把参数作为常数看待的。如果在某段时间内，根据经验知道参数随时间变化的线性度差，则采样间隔不能太大，应多取几组观测数据；否则，采样间隔可大一些，观测数据可少取一些。如果系统参数是时不变的，甚至只要取两组观测数据就可以了。

此外，在我们的方法中，没有考虑观测噪声的影响。因此，要求观测数据比较准确可靠，采样时必须采取适当措施以消除观测噪声的影响。有关观测噪声的影响拟另文讨论。

三、计算框图与程序

计算框图如图 2.

框图中的符号 $u(i,j)$ 表示在时间区间 $[t_i, t_{i+1})$ 上的控制（参数）向量 $\mathbf{u}$ 的第 j 个分量。$xx(p,l)$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 在 p 时刻第 l 个分量的估计值。其余符号较显明，不一一列举。

计算程序（略）。

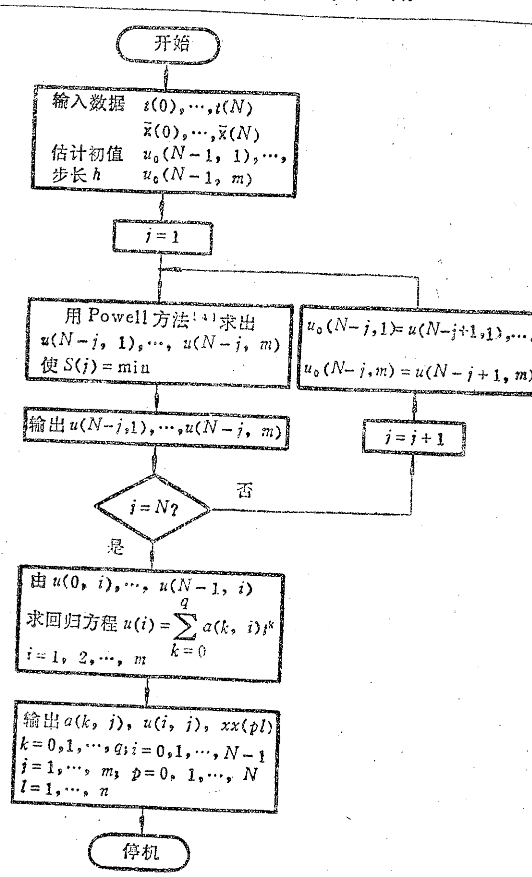

图 2 计算框图

四、模 拟 结 果

我们以模型（1）为例，在 TRS－80 型微型计算机上进行模型计算。为简单起见，令 $m_p=m_h=m_c=0.1$，$\sigma=10^{-4}$，$\sigma_p=1$，$\sigma_h=0.9$，是已知的常数。只估计P_p、G_p和G_h三个时变参数。设

$$
\begin{aligned}
P_p &= 0.04+1.2t-t^2,\\
G_p &= 0.012+0.96t-0.8t^2,\\
G_h &= 0.02+0.6t-0.5t^2.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

我们把一个月作为0.1个时间单位，考虑一年，即在时间区间〔0，1.2〕上考虑。设初始值 $P(0)=800$，$H(0)=40$，$C(0)=10$。将式（10）和上述数值代入模型（1），计算出P、H和C在$t=0.1,\cdots,1.2$各时刻的真值。根据这些数据，利用本文二所述方法，便可估计出时变参数P_p、G_p和G_h为

$$\hat{P}_p=0.0392067+1.19991t-0.999966t^2,$$

$$\hat{G}_p = 0.0116512 + 0.96098t - 0.802025t^2, \tag{10$'$}$$
$$\hat{G}_h = 0.019526 + 0.602142t - 0.502625t^2.$$

在本例中，损失函数取 (3)′ 的形式，其中加权矩阵 $W = \mathrm{diag}$

$$\left(\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{12} P(t_i)}, \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{12} H(t_i)}, \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{12} C(t_i)} \right).$$ 算得

$$J'(u) = 8.36428 \times 10^{-7}.$$

为了便于衡量 P、H 和 C 的估计值与其真值的偏离程度，还算出形式（3）的损失函数为

$$J(u) = 1.44966 \times 10^{-3}.$$

从计算结果看，精度是相当高的。

五、结　　语

如上所述，我们把系统的参数估计问题转化为最优控制问题，使得能够用较少的观测数据估计系统的时变参数，若参数是时不变的，则观测数据可以更少，这使得对于诸如估计生态系统那样采集数据困难、数据少的系统参数成为可能；我们又对离散动态规划方法进行简化，给出一种拟最优化方法，使动态规划方法变得易于实现；由于整个算法需要存贮的数据较少，因此在一般的微型计算机上都可以进行。

在数据少的情况下获得较高的估计精度，是通过反复迭代来达到的，因而计算时间较长。对此，我们采取了一定措施，可根据实际情况把整个计算过程分为若干次完成，避免计算机连续运行时间长可能出错的毛病。

虽然我们在微型计算机上模拟已获得较满意的结果，但我们的工作仅是初步的，对用拟最优化方法计算所引起的误差还没有给出严格的估计；所需的计算时间仍嫌太长，随着待估计的未知参数和点数的增加，计算时间将更长，因此，计算程序还要进一步优化以减少计算时间；整个方法还有待于在实践中进一步检验和完善。

参 考 文 献

〔1〕 Rajbman(ed.), Identification and System Parameter Estimation, North-Holland Publishing Compary (1978), 823.

〔2〕 Colin W. Clark, Mathematical Bioeconomic-The Optimal Management of Renewable Resources, A Wiley-Interscience Publication, New York (1976).

〔3〕 Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, Reprint (1955).

〔4〕 王德人编，非线性方程组解法与最优化方法，人民教育出版社（1979）.

A METHOD ON ESTIMATING TIME-VARYING PARAMETERS IN ECOSYSTEMS

Zhou Qinxue, Feng Qian, Qiu Zhaofu

(Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

In this paper, we consider the following system as a ecosystem model,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t; x, u) \\ t \in [t_0, T], \ x \in (R^n)^+, \ u \in V \subset R^m, \end{cases} \tag{2}$$

which is stable structurally in V, and the conditions of the existence and uniqueness theorem for this system are satisfied in $(R^n)^+$. **u** is an unknown m-dimensional parameter vector (time-varying or time-invarying).

Assume that $N+1$ observations $\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1), \ldots, \bar{x}(t_N)$ $(t_N = T)$ have been collected in the time interval $[t_0, T]$. The problem is to estimate the vector **u** according to the data of the observations.

Let $x(t_0) = \bar{x}(t_0)$. we regard x as a state vector and **u** as a control vector. The criteria for estimating vector **u** is the minimization of following cost functional

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \| x(t_i, u) - \bar{x}(t_i) \|^2. \tag{3}$$

We treated this problem as a problem of finding the optimal control u^* for the system (2) with the initial condition $x(t_0)$ by minimizing (3).

By simplifying the method of the dynamic programming, we developed a quasi-optimal method. This method requires fewer data of observations so that a microcomputer can be applied for implementing the estimation.

A satisfactory result is obtained by this quasi-optimal method for a specific model.