

随机模型的频域分析及辨识

夏安邦

(南京工学院)

摘要

本文证明了时间域内的平稳相关序列经离散傅里叶变换之后, 所得到的是频域内的正交随机序列。因此, 当系统的激励信号为确定性信号, 而输出信号被平稳相关随机噪声所污染时, 根据输入信号、输出信号的采样序列所得到的频率响应函数也是正交随机序列。利用方差的倒数加权进行最小二乘估计, 可以得到系统连续模型参数的有效估计值。

一、概 述

文献[1]提出了一种在频率域内辨识系统连续模型参数的方法, 其基本思想如下:

设被辨识的线性系统如图1所示, $u(t)$ 为确定性输入, $x(t)$ 为无污染的输出, $y(t)$ 为被噪声所污染的输出, $n(t)$ 为噪声, 设其为零均值广平稳随机过程。 $\{u(KT_s)\}$ 、 $\{y(KT_s)\}$ 分别为由 $u(t)$ 、 $y(t)$ 所得到的采样序列, T_s 为采样间隔。

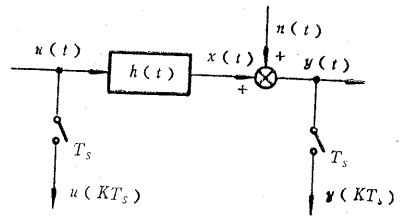


图 1

首先对 $\{u(KT_s)\}$ 、 $\{y(KT_s)\}$ 分别进行离散傅里叶变换:

$$U(jr\omega_s) = DFT[u(KT_s)],$$

$$Y(jr\omega_s) = DFT[y(KT_s)],$$

可得到系统的脉冲响应函数:

$$G^*(jr\omega_s) = \frac{Y(jr\omega_s) \bar{U}(jr\omega_s)}{U(jr\omega_s) \bar{U}(jr\omega_s)}$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, N-1;$$

短横“-”表示复共轭, N 为总采样点数。

去掉零阶保持器 $H_0(jr\omega_s)$ 的影响, 得到系统的频率响应函数 $G(jr\omega_s)$:

$$G(jr\omega_s) = \frac{T_s G^*(jr\omega_s)}{H_0(jr\omega_s)} \quad r = 0, 1, 2, \dots, N-1;$$

对于最小相位系统, 可取其实部进行参数估计, 令

$$\eta(r) = \operatorname{Re} [G(jr\omega_s)]$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, N-1;$$

设损失函数为

$$J = (\eta - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \pi)^T (\eta - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \pi),$$

其中

$$\eta^T = [\eta(0), \eta(1), \dots, \eta(M-1)] \in R^M,$$

$$\pi^T = [1, 1, \dots, 1] \in R^M,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n(0) & & & 0 \\ & \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n(1) & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n(M-1) \end{pmatrix} \in R^{M \times M},$$

$$\mathbf{a}^T = [a_0, a_1, \dots, a_n] \in R^{n+1},$$

$$\mathbf{S}_n(\tau)^T = [1, (\tau\omega_s)^2, \dots, (\tau\omega_s)^{2n}] \in R^{n+1}$$

$$\tau = 0, 1, 2, \dots, M-1,$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^T \mathbf{s}_m(0) & & & 0 \\ & \mathbf{b}^T \mathbf{s}_m(1) & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \mathbf{b}^T \mathbf{s}_m(M-1) \end{pmatrix} \in R^{M \times M},$$

$$\mathbf{b}^T = [b_0, b_1, \dots, b_m] \in R^{m+1},$$

$$\mathbf{S}_m(\tau) = [1, (\tau\omega_s)^2, \dots, (\tau\omega_s)^{2m}] \in R^{m+1},$$

$$M \leq N/4.$$

求解参数向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} , 使损失函数 J 为最小。由参数向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的估计值 $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}$ 可得到连续模型参数的估计值 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 。

对于最小相位系统, 根据 [1] 所提出的方法, 是将频域内的复有理最小二乘问题化成两个实线性最小二乘问题。要得到一个有效的估计量, 则应采用加权最小二乘的方法。因此使用 [1] 所提出的方法在输出信号被有色噪声所污染的情况下, 为了得到一个好的估计量, 关键问题是寻找加权最小二乘问题的权。本文证明: 时间域内平稳相关的随机序列, 经过离散傅里叶变换之后, 变成频率域内的正交随机序列, 其方差序列就是时域随机序列的谱密度函数的采样序列。所以在频域内使用最小二乘原理时, 可以很方便地采用协方差阵的逆矩阵加权而得到有效的估计值。

在很多情况下, 由于时域随机序列的谱密度函数并不知道, 因此频域内正交随机序列的协方差阵也无法求出。在正态分布的情况下, 可以仿照时域的情况, 对频域随机序列的协方差阵进行估计, 然后利用协方差阵的估计值加权, 求解出系统模型参数的估计值。由模型参数的估计值再对随机序列的协方差阵进行估计, 再加权求模型参数, 如此下去, 直到达到满意的精度为止。计算表明, 这种方法效果很好。

二、平稳时间序列的离散傅里叶变换

图 1 所示的线性系统中, $u(t)$ 为确定性输入, 当噪声 $n(t)$ 为零均值广平稳随机过程时, 不难看出输出 $y(t)$ 也是广平稳随机过程, 其均值为确定性输出 $x(t)$. 如果对 $y(t)$ 以 T_s 等间隔采样, 则得到一个广平稳随机序列, 显然

$$y(KT_s) = x(KT_s) + n(KT_s) \\ K = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $x(KT_s)$ 和 $n(KT_s)$ 分别为对 $x(t)$ 和 $n(t)$ 以 T_s 等间隔采样所得到的序列. $y(KT_s)$ 的均值为

$$E[y(KT_s)] = x(KT_s).$$

协方差阵 C_N 的元素 c_{1K-r1} 为

$$c_{1K-r1} = E\{[y(KT_s) - E y(KT_s)][y(rT_s) - E y(rT_s)]\} \\ = E\{n(KT_s)n(rT_s)\}. \quad (1)$$

一个广平稳随机序列, 若其长度为 N , N 代表任意正整数, 则矩阵 C_N 具有如下形式

$$C_N = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ c_1 & c_0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1} & \dots & \dots & c_0 \end{pmatrix} \in R^{N \times N}. \quad (2.a)$$

通常称式 (2.a) 为托布里兹矩阵^[3], 它是一个非负定矩阵, 其主对角线上的元素就是随机序列的方差, 与主对角线平行的各位置上诸元素都相同. 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 可以类似地定义一个协方差矩阵 C :

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_N & \dots \\ c_1 & c_0 & \dots & \vdots & \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \\ c_N & \dots & \dots & c_0 & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.b)$$

显然 C 为无穷维矩阵.

设离散傅里叶变换为如下形式:

$$Y(jr\omega_s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{K=0}^{N-1} y(KT_s) w_N^{Kr} \quad (3)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

其中 $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, N 为随机序列长度, 正整数. 可以认为: (3) 式定义了由实空间 Re 到复空间 Im 的一组线性变换, 它将集合 $\{y(KT_s)\}$ 映射成集合 $\{Y(jr\omega_s)\}$. 写

成矩阵的形式为

$$Y = w y, \quad (4)$$

其中 $Y^T = \{ Y(j\omega_s), Y(j\omega_s), \dots, Y[j(N-1)\omega_s] \}$,

$$y^T = \{ y(0), y(T_s), \dots, y[(N-1)T_s] \},$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \dots & w_N^{(N-1)} \\ 1 & w_N^2 & w_N^{2 \times 2} & \dots & w_N^{(N-1) \times 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & w_N^{2 \times (N-1)} & \dots & w_N^{(N-1) \times (N-1)} \end{pmatrix}.$$

由(3)式所确定的 $Y(jr\omega_s)$ 为另一随机序列, 它以频率为其参变量. 设随机序列 $Y(jr\omega_s)$ 的协方差矩阵为 D_N , 参考文献[4]证明了: 当采用(4)式所定义的线性变换时, 有

$$D_N = W C_N W^T, \quad (5)$$

其中 C_N 为(2.a)式所表示的托布里兹矩阵, 且

$$D_N = \{ d_{is} \} \in R^{N \times N}.$$

把(5)式展开, 得到

$$d_{is} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{K=0}^{N-1} w_N^{Ki-rs} c_{1r-K_1}, \quad (6)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$s = 0, 1, \dots, N-1,$$

其中 $c_{1r-K_1} = E \{ n(KT_s) n(rT_s) \}$.

当 $n(KT_s)$ 为白噪声时

$$C_N = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & & 0 \\ & \sigma^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma^2 \end{pmatrix} \in R^{N \times N},$$

即

$$c_{1r-K_1} = \begin{cases} \sigma^2 & r=K \\ 0 & r \neq K. \end{cases} \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式, 得

$$d_{is} = \begin{cases} \sigma^2 & i=s \\ 0 & i \neq s. \end{cases}$$

这说明: 时间域内的平稳随机序列如果是白噪声, 那么经过离散傅里叶变换之后, 在频率域内得到的随机序列仍然是平稳随机序列且为白噪声. 当时域内的平稳随机序列为有色噪声, 情况就复杂多了. 假定时间域内的有色噪声可以用自回归滑动平均 (ARMA)

模型来表示,那么可以证明:经离散傅里叶变换之后所得频率域随机序列是正交的。当时间域噪声为零均值时,所得频率域随机序列也为零均值。下面分两种情况来论证这个问题。

(1) $n(KT_s)$ 可用 q 阶滑动平均模型表示:

$$n(KT_s) = \sum_{t=0}^q h_t \xi(K-t), \quad (8)$$

其中 $\xi(t)$ 为零均值白噪声。显然

$$E\{n(KT_s)\} = \sum_{t=0}^q h_t E\{\xi(K-t)\} = 0.$$

随机序列 $n(KT_s)$ 的协方差矩阵 \mathbf{C} 的元素 c_{1r-K1} 为

$$\begin{aligned} c_{1r-K1} &= E\{n(KT_s) n(rT_s)\} \\ &= E\left\{ \sum_{t=0}^q h_t \xi(r-t) \cdot \sum_{l=0}^q h_l \xi(K-l) \right\} \\ &= \sum_{t=0}^q \sum_{l=0}^q h_t h_l E\{\xi(r-t) \xi(K-l)\}. \end{aligned} \quad (9)$$

考虑在

$$E\{\xi(r-t) \xi(K-l)\} = \begin{cases} \sigma^2 & r-t=K-l \\ 0 & r-t \neq K-l \end{cases}$$

之中,条件 $r-t=K-l$ 相当于 $r-K=t-l$, 而 $0 \leq |t-l| \leq q$. 故可断定:

$$\text{当 } |r-K| > q \text{ 时 } c_{1r-K1} = 0. \quad (10)$$

(10) 式说明:当有色噪声 $n(KT_s)$ 可以用零均值白噪声 $\xi(t)$ 的 q 阶滑动平均模型表示时,当时间差大于 q 时,其协方差函数的值为零。这时协方差阵 (2.b) 变成

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_q & 0 \\ c_1 & c_0 & \cdots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ c_q & \cdot & \cdot & \cdot & c_q \\ 0 & \cdot & c_q & \cdots & c_0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

将 (11) 式代入 (6) 式,先不考虑 $N \rightarrow \infty$ 的情况,则

$$d_{is} = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} w_N^{Ki-rs} c_{1r-K1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N} c_0 \sum_{K=0}^{N-1} w_N^{K(i-s)} + \frac{1}{N} [w_N^i - w_N^{-s}] c_1 \sum_{K=0}^{N-2} w_N^{K(i-s)} \\
 &+ \frac{1}{N} [w_N^{2i} + w_N^{-2s}] c_2 \sum_{K=0}^{N-3} w_N^{K(i-s)} \\
 &+ \frac{1}{N} [w_N^{qi} + w_N^{-qs}] c_q \sum_{K=0}^{K-q-1} w_N^{K(i-s)}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

考察 (12) 式右边每一项, 可以看出: 它们都含有因子 $\frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-\zeta-1} w_N^{K(i-s)}$, 其中 ζ 分

别取值 $0, 1, \dots, q$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 对该因子取极值

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{N=0}^{N-\zeta-1} w_N^{K(i-s)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} w_N^{K(i-s)} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{N=N-\zeta}^{N-1} w_N^{K(i-s)} = \begin{cases} 1 & i=s \\ 0 & i \neq s \end{cases}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

将 (13) 式代入 (12) 式, 得到

$$d_{is} = 0 \quad i \neq s$$

$$d_{ii} = c_0 + [w_N^i + w_N^{-s}] c_1 + [w_N^{2i} + w_N^{-2s}] c_2 + \dots + [w_N^{qi} + w_N^{-qs}] c_q \quad i = s.$$

$$\text{或} \quad d_{ii} = c_0 + 2c_1 \cos \frac{2\pi i}{N} + 2c_2 \cos \frac{4\pi i}{N} + \dots + 2c_q \cos \frac{2q\pi i}{N}. \quad (14)$$

由 (14) 式组成频率域随机序列的协方差阵 D

$$D = \begin{pmatrix} d_{00} & & & & \\ & d_{11} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{NN} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (15)$$

(15) 式说明: 当时间域内的平稳随机序列可以用有限阶滑动平均模型表示时, 经无穷点离散傅里叶变换之后, 成为频率域内正交非平稳随机序列。上述结论也可以推广到能用 ARMA 模型表示的平稳随机序列。我们从另一种角度来说明这一论点。

(2) $n(K T_s)$ 可用 ARMA 模型表示:

将平稳随机序列 $n(K T_s)$ 记为 $n(K)$, $K=0, 1, 2, \dots$ 。设它满足如下方程:

$$n(K) + a_1 n(K-1) + \dots + a_p n(K-p)$$

$$= \beta_0 \xi(K) + \beta_1 \xi(K-1) + \dots + \beta_q \xi(K-q).$$

其中 $\xi(K)$ 为白噪声序列, 其均值为零, 协方差为

$$E\{\xi(K)\xi(i)\} = \begin{cases} \sigma^2 & K=i \\ 0 & K \neq i \end{cases}.$$

设 $n(K)$ 具有谱密度 $f(\omega)$

$$f(\omega) = \sigma^2 \frac{\left| \sum_{r=0}^q \beta_r e^{-jr\omega} \right|^2}{\left| \sum_{r=0}^p \alpha_r e^{-jr\omega} \right|^2} \quad (17)$$

其中 $\alpha_0 = 1$, 不难证明 $\{n(K)\}$ 也是零均值弱平稳随机序列。如果 $\{n(K)\}$ 的自相关函数为 $c(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots$, 根据相关函数的谱展开定理^[3, 5, 6], 有

$$c(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega\tau} F(d\omega). \quad (18)$$

如果存在关于勒贝格测度几乎处处非负的函数 $f(\omega)$, 使

$$F(A) = \int_A f(\omega) d\omega, \quad (19)$$

那么 (18) 式便可化成黎曼积分

$$c(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega\tau} f(\omega) d\omega, \quad (20)$$

其中 $f(\omega)$ 就是 (17) 式所表示的谱密度^[3].

当

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} |c(\tau)| < \infty \text{ 时,}$$

$$f(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} c(\tau) e^{-j\omega\tau}.$$

考虑到 $c(\tau) = E\{n(K)n(r)\}$

其中 $\tau = |K-r| \cdot T_s$. 暂不考虑 $N \rightarrow \infty$ 的情况, 我们有

$$f(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{|K-r|=0}^{N-1} \{E[n(K)n(r)]\} e^{-j\omega|K-r|T_s} \quad (21)$$

在频率域内, 以 $\omega_s = \frac{2\pi}{NT_s}$ 等间隔采样, 得到:

$$\begin{aligned}
 f(i\omega_s) &= \frac{1}{N} \sum_{|K-r|=0}^{N-1} E\{n(K)n(r)\} e^{-ji\omega_s(K-r)T_s} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{|K-r|=0}^{N-1} E\{n(K)n(r)\} w_N^{i(K-r)}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

将(22)式与(6)式比较, 可以发现

$$f(i\omega_s) = d_{ii}. \quad (23)$$

(23)式说明, 对一个用ARMA过程表示的平稳时间序列的频谱密度函数, 以

$\omega_s = \frac{2\pi}{NT_s}$ 等间隔采样后, 所得到的序列可以认为是该平稳时间序列经离散傅里叶变换

之后所得到的随机序列的方差序列。

根据平稳随机序列的谱分解定理:

$$n(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iK\omega} z(d\omega), \quad (24)$$

其中 $z(\omega)$ 是左连续正交增量过程。当 $n(K)$ 为某一均方连续平稳随机过程的采样序列时, (24)式变成:

$$n(K) = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iK\omega} z(d\omega). \quad (25)$$

(25)式还可以表达为无穷级数的极限:

$$\begin{aligned}
 n(K) &= \lim_{\omega_s \rightarrow 0} \frac{1}{N\omega_s} \sum_{i=0}^{N-1} e^{iKi\omega_s} [z((i+1)\omega_s) - z(i\omega_s)] \\
 &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \omega_s \rightarrow 0}} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} e^{iKi\omega_s} \lim_{\omega_s \rightarrow 0} \frac{z[(i+1)\omega_s] - z(i\omega_s)}{\omega_s} \\
 &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \omega_s \rightarrow 0}} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} e^{iKi\omega_s} z'(i\omega_s). \quad (26)
 \end{aligned}$$

由于 $z(\omega)$ 是正交增量过程, 显然 $\{z'(i\omega_s)\}$ 应该是正交随机序列, 其方差由(23)式

$$d_{ii} = f(i\omega_s) \quad i=0, 1, 2, \dots$$

所确定。

从以上的推理可以看出：一个用 ARMA 过程表达的平稳时间序列经过离散傅里叶变换之后，得到一个正交随机序列。还可以证明，当平稳时间序列为正态分布时，所得到的频率域随机序列也是正态分布^[3, 4]。因此，在频率域进行参数估计时，很容易使用序列的方差加权，从而得到有效的估计。在正态分布的情况下，可以证明这时所得到的连续模型参数是极大似然估计量，同时是渐近无偏、渐近有效、渐近一致的。

三、协方差阵 D 的估计

我们已经证明，当时域内噪声的协方差阵 C 为托布里兹矩阵时，经离散傅里叶变换之后，频域内的协方差阵 D 为对角阵。其主对角线上的元素为噪声功率谱密度函数的采样序列。由于在绝大多数情况下，噪声的功率谱密度并不知道，因此要采用 D 的逆矩阵进行加权仍然存在困难。这时，只能根据已掌握的信息对协方差阵 D 进行估计。

假设噪声 $n(KT_s)$, $K=0, 1, 2, \dots, N$, 服从联合正态分布

$$P_N(n) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{2\Lambda}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Lambda} \sum_{r,K} \lambda_{rK} n_r n_K \right\}, \quad (27)$$

其中 $\Lambda = \det[C]$ 。

λ_{rK} 为协方差矩阵 C 中元素 c_{rK} 的代数余子式。采用 (4) 式规定的线性变换，得到一个新的复随机序列。它的实部和虚部独立且分布函数相同。根据参考文献 [4]，若令随机序列

$$\rho(r\omega_s) = \text{Re} \{ Y(jr\omega_s) - E[Y(jr\omega_s)] \}, \quad (28)$$

即

$$\rho(r\omega_s) = \text{Re} \{ \text{DFT} [n(KT_s)] \} \equiv \rho_r,$$

则可得到分布函数

$$P_N(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |D|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \rho^T D^{-1} \rho \right\}, \quad (29)$$

其中 $\rho^T = [\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{N-1}] \in R^N$,

$$D = \begin{pmatrix} d_{0,0} & & & 0 \\ & d_{1,1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \in R^{N \times N}.$$

(29) 式定义了一个似然方程，我们取其对数作为损失函数来求解协方差阵 D 的估计值。

$$J(D) = \ln P_N(\rho)$$

$$= -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \det [\mathbf{D}] - \frac{1}{2} \rho^T \mathbf{D}^{-1} \rho. \quad (30)$$

将(30)式对 D 微分, 并令其等于零, 得

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{D}} = \frac{1}{2} \mathbf{D}^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{D}^{-1} \rho \rho^T \mathbf{D}^{-1} = 0,$$

解出

$$\hat{\mathbf{D}} = \rho \rho^T. \quad (31)$$

当从 T 个周期的数据中求 $\hat{\mathbf{D}}$ 时, (31) 式变成

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \rho_{(i)} \rho_{(i)}^T,$$

和上面的推导完全相同, 可以推出由 $G(jr\omega_s)$ 估计系统连续模型参数时协方差阵 Σ 的估计值。由(29)式 ρ 的联合分布可以推出 $\{\eta(r)\}$ 的联合分布

$$P_N(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\eta - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \pi)^T \Sigma^{-1} (\eta - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \pi) \right\},$$

其中 Σ 为对角阵, 矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} , 向量 η 、 π 的定义如前面所述。与(31)式完全类似有

$$\hat{\Sigma} = (\eta - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \pi) (\eta - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \pi)^T. \quad (32)$$

当采用〔1〕的方法进行参数估计时, 要用 $\hat{\Sigma}^{-1}$ 加权。这时, \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 中含有未知的参数, 不能直接用(32)式来求 $\hat{\Sigma}$, 只能用前一次的估计值 $\hat{\mathbf{A}}_{v-1}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}_{v-1}$ 来求出下一次进行参数估计的协方差阵 $\hat{\Sigma}_v$ 。

$$\hat{\Sigma}_v = [\eta - \hat{\mathbf{A}}_{v-1}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{v-1} \cdot \pi] [\eta - \hat{\mathbf{A}}_{v-1}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{v-1} \cdot \pi]^T. \quad (33)$$

计算时, 考虑 Σ 为对角阵, 可以令 $\hat{\Sigma}$ 非主对角线上的元素全部为零。

四、例

例 1

$$G(s) = \frac{s+1.3}{s^2+0.6s+1.3}.$$

采样间隔: $T_s = 0.2$ 秒

m 序列长度: $N = 63$

时钟脉冲宽度: $\Delta t = 0.8$ 秒

总长度: $P = 252$

噪声方差: $\sigma^2 = 0.05$

计算结果见表 1, 共辨识了六个周期。

表 1

真 实 值		a_0	a_1	a_2	b_0	b_1
		1.3	0.6	1	1.3	1
第 一 周 期	估 计 值	1.3042	0.5978	1.0000	1.2854	0.9877
	误 差	0.0042	0.0022	0	0.0146	0.0123
第 二 周 期	估 计 值	1.3176	0.6093	1.0000	1.3370	0.9891
	误 差	0.0176	0.0093	0	0.037	0.0109
第 三 周 期	估 计 值	1.3161	0.6124	1.0000	1.3439	0.9929
	误 差	0.0161	0.0124	0	0.0439	0.0071
第 四 周 期	估 计 值	1.3073	0.6039	1.0000	1.3147	0.9942
	误 差	0.0073	0.0039	0.0000	0.0147	0.0058
第 五 周 期	估 计 值	1.3061	0.6014	1.0000	1.3106	0.9983
	误 差	0.0061	0.0014	0.0000	0.0106	0.0017
第 六 周 期	估 计 值	1.3021	0.5996	1.0000	1.2994	0.9987
	误 差	0.0021	0.0004	0	0.0006	0.0013

为了考察参数的收敛情况，以周期作为横座标，参数值作为纵座标作图。从图中不难看出各个参数的收敛性都很好。

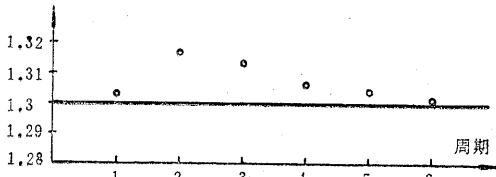


图 2 a_0 的估计值收敛情况

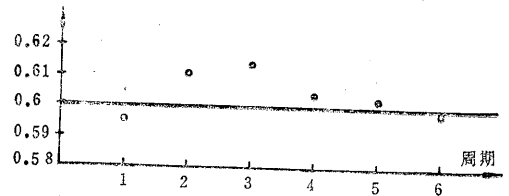


图 3 a_1 的估计值收敛情况

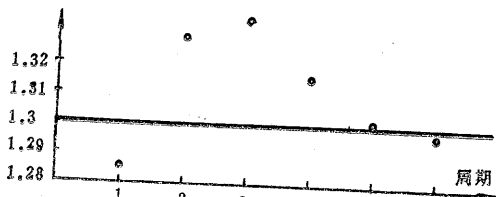


图 4 b_0 的估计值收敛情况

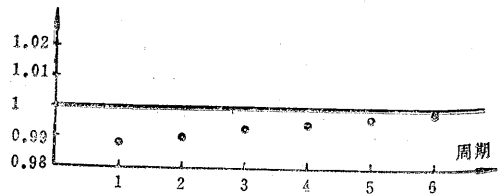


图 5 b_1 的估计值收敛情况

例 2

$$G(s) = \frac{s+1.3}{s^2+0.6s+1.3}$$

辨识条件和例1相同, 仅改变方差。取方差 $\sigma^2 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ 五种情况。从表2中可以看出: 当噪声方差加大时, 估计的精度略有下降。然而, 一直到方差为0.8时, 使用本文方法所得到的参数估计值仍然具有令人满意的精度。

表 2

σ^2	真实值	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1
		1.3	0.6	1	1.3	1
0.05	估计值	1.3021	0.5996	1.0000	1.2994	0.9987
	误差	0.0021	0.0004	0	0.0006	0.0013
0.1	估计值	1.3062	0.6036	1.0000	1.3126	0.9955
	误差	0.0062	0.0036	0	0.0126	0.0045
0.2	估计值	1.2952	0.6004	1.0000	1.2909	0.9993
	误差	0.0048	0.0004	0	0.0091	0.0007
0.4	估计值	1.2950	0.6068	1.0000	1.2956	1.0081
	误差	0.0050	0.0068	0	0.0044	0.0081
0.8	估计值	1.2997	0.5896	1.0000	1.2346	1.0000
	误差	0.0003	0.0104	0	0.0654	0

五、结 论

利用离散傅里叶变换辨识系统模型, 实质上是在频域内进行相关——最小二乘辨识。由于频域内随机序列的正交性, 使得当利用最小二乘原理进行参数估计时, 可以很方便地用方差的倒数进行加权从而得到有效的估计量。特别是当噪声为正态分布时, 用本文的方法所得到的估计量是渐近无偏、渐近有效、渐近一致的。从所计算的例子可以看出, 本方法的计算精度高, 同时允许系统有较大的噪信比。当采用离散傅里叶变换的快速算法, 辨识的速度很快。对于本文所列举的例子, 周期总长度为252点时, 处理六个周期数据只需要3分钟。如果增加周期长度, 则更能突出本方法快速的优点。一般来讲, 使用本文所提方法辨识连续模型参数, 精度和速度都优于时域内的相关——最小二乘两步法。

致谢 本文在写作过程中得到南京工学院徐南荣副教授的指导和帮助, 特此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 夏安邦、徐南荣, 连续系统辨识的一种频域方法, 南京工学院学报, 4(1983), 115—126.
- [2] 焦小澄, Winograd快速算法的推广及其在系统辨识中的应用, 南京工学院研究生论文集(1981).
- [3] 复旦大学, 概率论, 第三册, 随机过程, 人民教育出版社(1981), 253—272.
- [4] Cramer, H., Mathematical Methods of statistics, Princeton University press, Princeton (1946), Chapter 24.
- [5] 王梓坤, 随机过程论(第八章), 科学出版社(1978).
- [6] Doob, J. L., Stochastic processes, John Wiley & Sons, Inc, U. S. A. (1953), 94—101, 481—506, 560—598.

ANALYSIS AND IDENTIFICATION OF STOCHASTIC
MODELS IN FREQUENCY DOMAIN

Shia Anbang

(Nanjing Institute of Technology)

Abstract

This paper proved that a frequency stochastic sequence obtained from a stationarily correlated time series by using discrete Fourier transform is orthogonal. Hence, if the excitation signal of a system is deterministic and its output is subjected to stationarily correlated random noise, the frequency response in terms of the sampled sequences of the system input and output is also orthogonal. In a weighted least squares estimator with a weighting matrix of the inverse of the variance, the estimate of the model parameters of the continuous system is efficient in the normal case.