

多重时滞系统的自适应递推滤波器

邓自立 郭一新

(黑龙江省应用数学研究所)

摘 要

本文提出了多重时滞系统的自适应递推滤波器,给出了常值噪声统计的次优、无偏、极大后验递推估值器,也给出了时变噪声统计估值器,推广了 Sage 和 Husa^[5]的结果.本文的结果可应用于水文和环境系统^[2,3,4].数值模拟例子证明了本文结果的有效性.

一、多重时滞系统的次优递推滤波器

考虑多重时滞系统

$$x(k+1) = \sum_{j=0}^{\theta} [A_j(k)x(k-j) + B_j(k)u(k-j)] + w(k), \quad (1)$$

观测方程为

$$z(k+1) = H(k+1)x(k+1) + v(k+1), \quad (2)$$

其中 $x(k)$ 为 $n \times 1$ 状态向量; $u(k)$ 为已知的 $r \times 1$ 输入向量, $z(k)$ 是 $m \times 1$ 观测向量, A_j, B_j, H 为已知的矩阵, k 是离散时间, θ 为已知的模型的阶. 模型噪声 $w(k)$ 和观测噪声 $v(k)$ 是独立的高斯白噪声:

$$\begin{aligned} E[w(k)] &= q, \text{cov}[w(k), w(j)] = Q\delta_{kj}, \\ E[v(k)] &= r, \text{cov}[v(k), v(j)] = R\delta_{kj}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 E 是均值号, cov 是协方差, δ_{kj} 是 Kronecker 函数.

初始假定及其解释同文献[1]:

$$\begin{aligned} \hat{x}(i|i) &= E[x(i)], \text{cov}[x(i), x(i)] = P(i|i), \quad i = 0, -1, \dots, -\theta, \\ \text{cov}[x(i), x(j)] &= O, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, -1, \dots, -\theta; \\ \text{cov}[x(i), w(k)] &= O, \text{cov}[x(i), v(k)] = O, \quad i = 0, -1, \dots, -\theta; \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

当噪声统计已知时,可用增广状态方法解决系统(1)、(2)的滤波问题,但由于状态维数的增加使计算量剧增.为了便于实时运算,可采用 Tamura 的次优递推滤波

器^[1];

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + K(k+1)\mathbf{e}(k+1), \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \sum_{j=0}^{\theta} [A_j(k)\hat{\mathbf{x}}(k-j|k-j) + B_j(k)\mathbf{u}(k-j)]\mathbf{q}, + \quad (6)$$

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) - H(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) - \mathbf{r}, \quad (7)$$

$$K(k+1) = P(k+1|k)H(k+1)^T[H(k+1)P(k+1|k)H(k+1)^T + R]^{-1}, \quad (8)$$

$$P(k+1|k) = \sum_{j=0}^{\theta} A_j(k)P(k-j|k-j)A_j(k)^T + Q, \quad (9)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1)H(k+1)]P(k+1|k), \quad (10)$$

其中 $P(k+1|k+1)$ 、 $P(k+1|k)$ 分别为滤波误差 $\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1)$ 、预报误差 $\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$ 的协方差。(5) — (10) 包括普通 Kalman 滤波方程组为特例。

由 (1)、(2)、(5)、(6) 式易导出

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = [I - K(k+1)H(k+1)] & \left[\sum_{j=0}^{\theta} A_j(k)\tilde{\mathbf{x}}(k-j|k-j) + (\mathbf{w}(k) - \mathbf{q}) \right] \\ & - K(k+1)[\mathbf{v}(k+1) - \mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (11)$$

由 (11) 式和初始条件 (4) 式易递推出：当 $k \geq 0$ 时， $E[\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k+1)] = \mathbf{0}$ 。

当 $k \geq \theta + 1$ 时，进一步假设^[1] $\tilde{\mathbf{x}}(k|k)$ 、 $\tilde{\mathbf{x}}(k-1|k-1)$ 、 \dots 、 $\tilde{\mathbf{x}}(k-\theta|k-\theta)$ 互不相关，于是由 (1)、(2)、(6)、(7) 式，次优新息 $\mathbf{e}(k+1)$ 可表为：

$$\mathbf{e}(k+1) = H(k+1) \left[\sum_{j=0}^{\theta} A_j(k)\tilde{\mathbf{x}}(k-j|k-j) + \mathbf{w}(k) - \mathbf{q} \right] + (\mathbf{v}(k+1) - \mathbf{r}), \quad (12)$$

进而易知次优新息 $\mathbf{e}(k+1)$ 为拟白噪声：

$$E[\mathbf{e}(k+1)] = \mathbf{0}, \quad k \geq 0, \quad (13)$$

$$E[\mathbf{e}(k)\mathbf{e}(i)^T] = \begin{cases} \mathbf{0}, & |k-i| > \theta, \\ H(k)P(k|k-1)H(k)^T + R, & k=i, \end{cases} \quad (14)$$

其中 T 是转置号， $P(k|k-1)$ 由 (9) 式计算。

二、噪声统计估值器和自适应滤波

当噪声均值 \mathbf{q} 、 \mathbf{r} 、协方差 Q 、 R 未知时，问题是基于观测 $\{\mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(k+1)\}$ 求噪声统计估值器和自适应滤波器。平行于 Sage 和 Husa^[6] 的推导，可证明下述的基于

观测 $\{z(1), \dots, z(k+1)\}$ 的噪声统计的次优极大后验估值器是无偏的:

$$\hat{q}(k+1) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \left\{ \hat{x}(i+1|i+1) - \sum_{j=0}^{\theta} [A_j(i) \hat{x}(i-j|i-j) + B_j(i)u(i-j)] \right\}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}(k+1) &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k [K(i+1)\varepsilon(i+1)\varepsilon(i+1)^TK(i+1)^T + P(i+1|i+1) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\theta} A_j(i)P(i-j|i-j)A_j(i)^T], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\hat{r}(k+1) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k [z(i+1) - H(i+1)\hat{x}(i+1|i)], \quad (17)$$

$$\hat{R}(k+1) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k [\varepsilon(i+1)\varepsilon(i+1)^T - H(i+1)P(i+1|i)H(i+1)^T]. \quad (18)$$

事实上, 由(13)、(5)、(6)式立刻有 $E[\hat{q}(k+1)] = q$. 由(13)、(7)式立刻有 $E[\hat{r}(k+1)] = r$. 由(14)式也立刻有 $E[\hat{R}(k+1)] = R$. 最后, 依次把(14)、(8)式和(10)式的转置及(9)式代入(16)式引出 $E[\hat{Q}(k+1)] = Q$.

由(15) — (18)式可得递推噪声统计估值器为:

$$\begin{aligned} \hat{q}(k+1) &= \frac{1}{k+1} \{k\hat{q}(k) + \hat{x}(k+1|k+1) - \sum_{j=0}^{\theta} [A_j(k)(\hat{x}(k-j|k-j) \\ &\quad + B_j(k)u(k-j))]\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}(k+1) &= \frac{1}{k+1} [k\hat{Q}(k) + K(k+1)\varepsilon(k+1)\varepsilon(k+1)^TK(k+1)^T + P(k+1|k+1) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\theta} A_j(k)P(k-j|k-j)A_j(k)^T], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\hat{r}(k+1) = \frac{1}{k+1} [k\hat{r}(k) + z(k+1) - H(k+1)\hat{x}(k+1|k)], \quad (21)$$

$$\hat{R}(k+1) = \frac{1}{k+1} [k\hat{R}(k) + \varepsilon(k+1)\varepsilon(k+1)^T - H(k+1)P(k+1|k)H(k+1)^T]. \quad (22)$$

估值器 (19) — (22) 包括 Sage 和 Husa^[5] 结果作为特例。

在 Tamura 的次优递推滤波器 (5) — (10) 中的噪声统计 q, r, Q, R 分别用它们在时刻 k 的估值 $\hat{q}(k), \hat{r}(k), \hat{Q}(k), \hat{R}(k)$ 代替, 便得到了相应的自适应递推滤波器。噪声统计的初始估值为

$$\hat{q}(0), \hat{r}(0), \hat{Q}(0), \hat{R}(0). \quad (23)$$

交替地应用 (5) — (10) 式和 (19) — (22) 式可递推估计系统的状态和噪声统计, 其中在 (5) — (10) 式中要用在时刻 k 的噪声统计估值代入。

现在假定未知的噪声统计是时变的:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(i)] &= \mathbf{q}(i), \quad \text{cov}[\mathbf{w}(i), \mathbf{w}(j)] = Q(i)\delta_{ij}, \\ E[\mathbf{v}(i)] &= \mathbf{r}(i), \quad \text{cov}[\mathbf{v}(i), \mathbf{v}(j)] = R(i)\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (24)$$

基于 (19) — (22) 式, 用指数加权法^[6] 易导出相应的时变噪声统计估值器为:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(k+1) &= (1-d_k)\hat{\mathbf{q}}(k) + d_k \left\{ \hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{\theta} \left[A_j(k)\hat{\mathbf{x}}(k-j|k-j) + B_j(k)\mathbf{u}(k-j) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}(k+1) &= (1-d_k)\hat{Q}(k) + d_k \left[K(k+1)\boldsymbol{\varepsilon}(k+1)\boldsymbol{\varepsilon}(k+1)^T K(k+1)^T \right. \\ &\quad \left. + P(k+1|k+1) - \sum_{j=0}^{\theta} A_j(k)P(k-j|k-j)A_j^T(k) \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{r}}(k+1) = (1-d_k)\hat{\mathbf{r}}(k) + d_k \left[\mathbf{z}(k+1) - H(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \right], \quad (27)$$

$$\hat{R}(k+1) = (1-d_k)\hat{R}(k) + d_k \left[\boldsymbol{\varepsilon}(k+1)\boldsymbol{\varepsilon}(k+1)^T - H(k+1)P(k+1|k)H(k+1)^T \right], \quad (28)$$

其中 $d_k = (1-b)/(1-b^{k+1})$, $0 < b < 1$, b 为遗忘因子。

类似地可得到相应的自适应递推滤波器。

三、数值模拟例子

考虑纯量系统

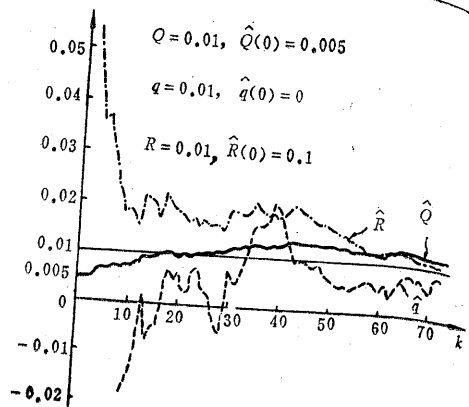
$$x(k+1) = 0.7x(k) + 0.4x(k-1) + w(k), \quad (29)$$

$$z(k) = x(k) + v(k), \quad (30)$$

其中 噪声统计为 $q=0.01$, $Q=0.01$, $r=0$, $R=0.01$ 。取初始为 $x(0)=10$, $x(-1)=0$, $\hat{x}(-1|-1)=0$, $\hat{x}(0|0)=10$; $P(-1|-1)=0$, $P(0|0)=0$; $\hat{q}(0)=0$, $\hat{R}(0)=0.1$, $\hat{Q}(0)=0.005$,

用本文算法在 Z-80 机上模拟结果如图所示。由图看到, 尽管噪声统计的初始估值误差可以很大, 但随迭代次数 k 的增加, 它们的估值都逼近于各自的真实值。这表明本文提出的噪声统计估值器 (19) — (22) 式及相应的自适应递推滤波器的有效性。

图 $\hat{Q}(k)$ 、 $\hat{q}(k)$ 、 $\hat{R}(k)$ 的收敛性



参 考 文 献

- [1] Tamura, H. and Ueno, N., Suboptimal Recursive Filter for the Distributed-Delay Model-SMART, 計測自動制御学会論文集, 11, 3 (1975), 296—302.
- [2] Tamura, H. and Ueno, N., Sequential Filter for the Distributed-Delay Model with Serially Connected Structure and Its Application to State Estimation of the Water Quality in a River, 計測自動制御学会論文集, 11, 4 (1975).
- [3] Tamura, H., Application of Kalman Filtering Techniques to River Quality Systems, システムと制御 (Systems and Control), 22, 1 (1978), 20—27.
- [4] Nagata, M., River Flow Prediction by Multiplicative Kalman Filter, 計測自動制御学会論文集, 16, 5 (1980), 643—649.
- [5] Sage, A. P. and Husa, G. W., Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics, 1969 Joint Automatic Control Conference, 760—769.
- [6] 邓自立、郭一新, 油田产油量、产水量动态预报, 自动化学报, 9, 2 (1983), 120—126.

AN ADAPTIVE RECURSIVE FILTER FOR SYSTEMS WITH MULTIPLE TIME DELAYS

Deng Zili, Guo Yixin

(Heilongjiang Institute of Applied Mathematics)

Abstract

This paper presents an adaptive recursive filter for systems with multiple time delays. For both stationary and nonstationary noise processes, suboptimal unbiased maximum a posteriori estimators of the mean and covariance are given. Sage and Husa's results are extended. The results of this paper can be applied to hydrology and environmental systems^[2,3,4]. Numerical simulation example for illustrating the feasibility of the proposed method is given.