第1卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol. 1, No. 4
1984年10月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　October, 1984

# 带钢厚度前馈最优控制的一种新算法

杨春江　杨自厚　李世卿

（东北工学院）

## 摘　要

本文根据有限时间区间的厚差信息，利用有限时间二次型指标，提出一种新的带钢轧机厚度前馈最优控制，这一控制为厚差按双曲线余弦加权积分算法．这一算法简单，易于在线实时控制，并且消除了美坂佳肋所给前馈最优算法所产生的稳态误差．计算机仿真结果证明，所给算法和结论是正确的．

在前文[1]中，作者利用无限时间二次型指标，推导出带钢轧机厚度前馈最优控制算法，这一算法是厚差按指数加权积分的算法．由于厚差信息只能在有限区间内取得，所以只能采用近似最优控制算法，这就是美坂佳助等人给出的算法[2]．在前文中分析和指出，利用这一近似前馈最优控制算法，在输入为阶跃扰动时，将出现稳态厚差．

为了改进控制效果，本文根据有限时间二次型指标，给出一种新的前馈最优控制算法，这一算法简单，易于实现在线控制，并且与美坂佳助等人给出的算法相比，可以消阶跃扰动的稳态厚差，提高控制质量．

## 一、指标上限为有限时间的n阶系统最优控制的综合

任意$n$阶常系数非齐次系统如图1所示，图中$W_n(s)$为系统开环传递函数，$\eta$为干扰，则系统运动方程为

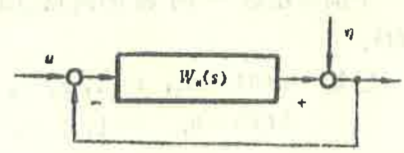


图 1

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_iy^{(n-i)}+\cdots+a_ny$$
$$=bu+\eta^{(n)}+\beta_1\eta^{(n-1)}+\cdots+\beta_n\eta. \qquad (1)$$

令　$y=x_1$，$\dot{y}=x_2,\cdots$，$y^{(n-1)}=x_n$；

$$\eta^{(n)}+\beta_1\eta^{(n-1)}+\cdots+\beta_n\eta=V;$$

则系统可写成

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{AX}+\mathbf{B}u+\mathbf{CV}, \qquad (2)$$

本文于1982年12月11日收到．1984年6月12日收到修改稿．

式中

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&0\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&1\\-a_n&-a_{n-1}&\cdots&&-a_1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\b\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

对于所论问题，性能指标为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^T(\mathbf{X}^T\mathbf{Q}_A\mathbf{X}+u^TRu)d\tau, \tag{3}$$

式中 $\mathbf{Q}_A=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$， $R$ 为常数。

最优控制可以写成开环形式 $u(t)$，又可以写成闭环形式 $u(x(t),t)$。我们先求开环形式的解。

不考虑重根情况，最优控制为（解法见附录）

$$u^*(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}+\cdots+c_{2n}e^{r_{2n}t}+u_v, \tag{4}$$

式中 $c_1$，$c_2,\cdots$，$c_{2n}$ 为待定复常数。

下面给出这一问题的两点边值问题的解法，确定这些待定常数，唯一地确定 $u^*(t)$。

已知 $x_i(0)=x_{i0}$，$i=1,2,\cdots,n$，

$\lambda_i(T)=0$，$i=1,2,\cdots,n$，

由这一条件及式（$A-6$），可得

$$\lambda_n(T)=\dot{\lambda}_n(T)=\cdots=\lambda_n^{(n-1)}(T)=0,$$

故

$$u(T)=\dot{u}(T)=\cdots=u^{(n-1)}(T)=0.$$

已知条件变为

$$x_i(0)=x_{i0},\quad u^{(i-1)}(T)=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

令 $u_v=f(t)$，由式（4）求 $u$ 的各阶导数，代入式（$A$—4），可得

$$c_1(r_1^n-a_1r_1^{n-1}+\cdots+(-1)^na_n)e^{r_1t}+c_2(r_2^n-a_1r_2^{n-1}+\cdots+(-1)^na_n)e^{r_2t}+\cdots$$

$$+c_{2n}(r_{2n}^n-a_1r_{2n}^{n-1}+\cdots+(-1)^na_n)e^{r_{2n}t}+f^{(n)}(t)-a_1f^{(n-1)}(t)+\cdots$$

$$+(-1)^na_nf(t)=(-1)^{n-1}R^{-1}bx_1. \tag{5}$$

令 $r_i^n-a_1r_i^{n-1}+a_2r_i^{n-2}+\cdots+(-1)^na_n=H_i$,

$$f^{(n)}(t)-a_1f^{(n-1)}(t)+\cdots+(-1)^na_nf(t)=F(t),$$

则有

$$c_1H_1e^{r_1t}+c_2H_2e^{r_2t}+\cdots+c_{2n}H_{2n}e^{r_{2n}t}=(-1)^{n-1}R^{-1}bx_1-F(t). \tag{6}$$

由式（4）和式（6）逐次求导，可以得到 $2n$ 个方程。将 $t=0$ 和 $t=T$ 的 $2n$ 个边界条件代入，写成矩阵形式，可得

$$\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \\ \vdots\\ \\ c_{2n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \cdots & H_{2n}\\ H_1r_1 & H_2r_2 & \cdots & H_{2n}r_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ H_1r_1^{n-1} & H_2r_2^{n-1} & \cdots & H_{2n}r_{2n}^{n-1}\\ e^{r_1T} & e^{r_2T} & \cdots & e^{r_{2n}T}\\ r_1e^{r_1T} & r_2e^{r_2T} & \cdots & r_{2n}e^{r_{2n}T}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_1^{n-1}e^{r_1T} & r_2^{n-1}e^{r_2T} & & r_{2n}^{n-1}e^{r_{2n}T}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}(-1)^{n-1}R^{-1}bx(0)-F(0)\\ (-1)^{n-1}R^{-1}b\dot{x}(0)-\dot{F}(0)\\ \vdots\\ (-1)^{n-1}R^{-1}bx^{n-1}(0)-F^{(n-1)}(0)\\ -f(T)\\ -\dot{f}(T)\\ \vdots\\ -f^{(n-1)}(T)\end{bmatrix}.$$

由之可以唯一地确定 $2n$ 个常数 $c_i$，$i=1,\cdots,2n$。最优控制为

$$u^*(t)=\sum_{i=1}^{2n}\left[c_ie^{r_it}+D_ie^{r_it}\int_0^te^{-r_it}V(\tau)d\tau\right]. \tag{8}$$

这就是最优控制的开环形式。

下面进一步对系统进行综合，求最优控制的闭合形式。由于系统非齐次，

$$\lambda=-\mathbf{KX}+g_n,$$

分别代入式（2）、（$A-2$）、（$A-3$），并整理，得

$$(-\dot{\mathbf{K}}-\mathbf{KA}+\mathbf{KB}R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}-\mathbf{Q}_A-\mathbf{A}^T\mathbf{K})\mathbf{X}=\mathbf{KB}R^{-1}\mathbf{B}^Tg_n-\dot{g}_n-\mathbf{A}^Tg_n+\mathbf{KCV}. \quad (9)$$

因对所有变量 X 均成立，故方程的解为

$$-\dot{\mathbf{K}}-\mathbf{KA}+\mathbf{KBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}-\mathbf{Q}_A-\mathbf{A}^T\mathbf{K}=0, \quad (10)$$

$$\mathbf{KBR}^{-1}\mathbf{B}^Tg_n-\dot{g}_n-\mathbf{A}^Tg_n+\mathbf{KCV}=0. \quad (11)$$

由式（10）可见，K 仅与系统结构参数 A、B 及 R、$\mathbf{Q}_A$ 有关，与外扰无关．可令 $V=0$，这时 $g_n=0$．由式（$A-5$），$u$ 只与 $\lambda_n$ 有关

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}* & * & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k_1 & k_2 & & k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

所以

$$Rb^{-1}u=-(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n). \quad (12)$$

将 $u$ 及 $x_i$ 代入，并考虑 $V=0$，则有

$$\begin{aligned}c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}+\cdots+c_{2n}e^{r_{2n}t}=(-1)^n[&k_1c_1H_1e^{r_1t}+k_1c_2H_2e^{r_2t}\\ &+\cdots+k_1c_{2n}H_{2n}e^{r_{2n}t}+k_2c_1H_1r_1e^{r_1t}+\cdots+k_2c_{2n}H_{2n}r_{2n}e^{r_{2n}t}\\ &+\cdots+k_nc_1H_1r_1^{n-1}e^{r_1t}+k_nc_2H_2r_2^{n-1}e^{r_2t}+\cdots\\ &+k_nc_{2n}H_{2n}r_{2n}^{n-1}e^{r_{2n}t}].\end{aligned} \quad (13)$$

从式（7）可以看出，因 $f=0$，$F=0$，故 $c_1,c_2,\cdots,c_{2n}$ 只是 $x_i(0)$ 的线性组合．故式（13）两边展开并整理，可以得到如下形式：

$$\begin{aligned}W_1(t)x_1(0)+W_2(t)x_2(0)+\cdots+W_n(t)x_n(0)=[&m_{11}(t)k_1(t)+m_{12}(t)k_2(t)\\ &+\cdots+m_{1n}(t)k_n(t)]x_1(0)+[m_{21}(t)k_1(t)+m_{22}(t)k_2(t)+\cdots\\ &+m_{2n}(t)k_n(t)]x_2(0)+\cdots[m_{n1}(t)k_1(t)+m_{n2}(t)k_2(t)+\cdots\\ &+m_{nn}(t)k_n(t)]x_n(0).\end{aligned} \quad (14)$$

上式对任意 $x_i(0)$ 均成立，故得

$$\begin{aligned}&m_{11}(t)k_1(t)+m_{12}(t)k_2(t)+\cdots+m_{1n}(t)k_n(t)=W_1(t),\\ &m_{21}(t)k_1(t)+m_{22}(t)k_2(t)+\cdots+m_{2n}(t)k_n(t)=W_2(t),\\ &\qquad\vdots\\ &m_{n1}(t)k_1(t)+m_{n2}(t)k_2(t)+\cdots+m_{nn}(t)k_n(t)=W_n(t).\end{aligned}$$

或可写成矩阵形式，得

$$\mathbf{MK}=\mathbf{W}.$$

当在 $[0,T]$ 内，$|\mathbf{M}|\neq 0$，于是可以确定

$$\mathbf{K}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}. \quad (15)$$

下面求 $g_n$，$g_n=\lambda+\mathbf{KX}$．$v\neq 0$ 时，将式(7)分为两部分，记

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \cdots & H_{2n} \\ H_1 r_1 & H_2 r_2 & \cdots & H_{2n} r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_1 r_1^{n-1} & H_2 r_2^{n-1} & & H_{2n} r_{2n}^{n-1} \\ e^{r_1 T} & e^{r_2 T} & & e^{r_{2n} T} \\ r_1 e^{r_1 T} & r_2 e^{r_2 T} & & r_{2n} e^{r_{2n} T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1}\ e^{r_1 T} & r_2^{n-1}\ e^{r_2 T} & & r_{2n}^{n-1}\ e^{r_{2n} T} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} (-1)^{n-1}\ R^{-1} b x(0) \\ (-1)^{n-1}\ R^{-1}\ b\ \dot{x}\ (0) \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}\ R^{-1} b x^{n-1}(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}=\begin{bmatrix} F(0) \\ \dot{F}(0) \\ \vdots \\ F^{n-1}(0) \\ f(T) \\ \vdots \\ f^{n-1}(T) \end{bmatrix}.$$

由式(7)，有

$$\mathbf{C}=\mathbf{P}(\mathbf{L}-\mathbf{S})=\mathbf{PL}-\mathbf{PS}. \tag{16}$$

又由式(6)，逐次求导得到$n$个方程，令

$$\mathbf{E}=[e^{r_1 t}\quad e^{r_2 t}\ \cdots\ e^{r_{2n} t}],$$

$$\mathbf{Q}_B=\begin{bmatrix} H_1 e^{r_1 t} & H_2 e^{r_2 t} & \cdots & H_{2n} e^{r_{2n} t} \\ H_1 r_1 e^{r_1 t} & H_2 r_2 e^{r_2 t} & & H_{2n} r_{2n} e^{r_{2n} t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_1 r_1^{n-1}\ e^{r_1 t} & H_2 r_2^{n-1}\ e^{r_2 t} & & H_{2n} r_{2n}^{n-1}\ e^{r_{2n} t} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}^T=[F(t)\quad \dot{F}(t)\quad \cdots\quad F^{(n-1)}(t)],$$

$$\mathbf{K}_A=[k_1\ \ k_2\ \cdots\ k_n].$$

得

$$(-1)^{n-1}R^{-1}b\mathbf{X}=\mathbf{Q}_B\mathbf{C}+\mathbf{F}=\mathbf{Q}_B\mathbf{PL}-\mathbf{Q}_B\mathbf{PS}+\mathbf{F}. \tag{17}$$

又由式(13)，得

$$\mathbf{EPL}=\frac{1}{(-1)^n}\mathbf{K}_A\mathbf{Q}_B\mathbf{PL}. \tag{18}$$

由以上诸关系，可以求出

$$g_n=\frac{R}{b}\left[\mathrm{u}_v-\mathbf{EPS}-\frac{1}{(-1)^{n-1}}\mathbf{K}_A\mathbf{Q}_B\mathbf{PS}+\frac{1}{(-1)^{n-1}}\mathbf{K}_A\mathbf{F}\right]. \tag{19}$$

至此，$\mathbf{K}_A$ 和 $g_n$ 已完全确定，最优控制为

$$u^*=R^{-1}b(-\mathbf{K}_A\mathbf{X}+g_n).$$

## 二、带钢厚度前馈最优控制

带钢轧机厚度控制系统一般用轧制力反馈控制和来料厚差的前馈控制组成，系统框图经简化后，如图 2 所示[1]. 图中 $\Delta h_d=\frac{Q}{M+Q}\Delta H$ 为来料厚差 $\Delta H$ 为所造成的出口厚差.

根据图 2 所示结构图，可写出如下运动方程式

$$\dot{x}=-\frac{M}{M+Q}k_px+\frac{M}{M+Q}k_pu+\Delta\dot{h}_d.$$

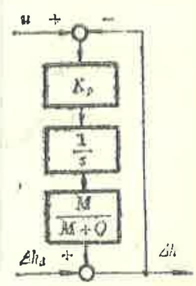


图 2

取性能指标为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^T(x^2+Ru^2)d\tau.$$

由式（$A-6$）可知，最优控制的开环形式满足

$$\ddot{u}-\left[\left(\frac{Mk_p}{M+Q}\right)^2+\frac{1}{R}\left(\frac{Mk_p}{M+Q}\right)^2\right]u=\frac{1}{R}\left(\frac{Mk_p}{M+Q}\right)\Delta\dot{h}_d. \tag{20}$$

特征方程的根为

$$r_1=\frac{Mk_p}{M+Q}\delta=r, \qquad r_2=-\frac{Mk_p}{M+Q}\delta=-r,$$

其中 $\delta=\sqrt{1+\frac{1}{R}}$. 于是

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}\frac{Mk_p}{M+Q}(\delta-1)\\ -\frac{Mk_p}{M+Q}(\delta-1)\end{pmatrix},$$

$$
\mathbf{P}=\begin{bmatrix}
\dfrac{M+Q}{Mk_p}\left(\dfrac{e^{-rT}}{(\delta+1)e^{rT}+(\delta-1)e^{-rT}}\right) & \dfrac{\delta+1}{(\delta+1)e^{rT}+(\delta-1)e^{-rT}} \\
-\dfrac{M+Q}{Mk_p}\left(\dfrac{e^{rT}}{(\delta+1)e^{rT}+(\delta-1)e^{-rT}}\right) & \dfrac{\delta-1}{(\delta+1)e^{rT}+(\delta-1)e^{-rT}}
\end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{Q}_B=\left[\frac{Mk_p}{M+Q}(\delta-1)e^{rt}\quad -\frac{Mk_p}{M+Q}(\delta+1)e^{-rt}\right],
$$

$$
\mathbf{E}=(e^{rt}\quad e^{-rt}),\qquad L=\begin{bmatrix}\dfrac{b}{R}x(0)\\ 0\end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{S}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{2R\delta}\displaystyle\int_0^T(e^{r(T-\tau)}-e^{-r(T-\tau)})v(\tau)d\tau\end{bmatrix}.
$$

可以求得

$$
K=\frac{e^{r(T-t)}-e^{-r(T-t)}}{(\delta+1)e^{r(T-t)}+(\delta-1)e^{-r(T-t)}}\cdot\frac{1}{b}, \tag{21}
$$

$$
g_n=-\frac{2\displaystyle\int_t^T \mathrm{sh}[r(T-t)]v(\tau)d\tau}{b[(\delta+1)e^{r(T-t)}+(\delta-1)e^{-r(T-t)}]}. \tag{22}
$$

最优控制为

$$
u^*=-\frac{2}{R}\left(\frac{x\cdot\mathrm{sh}[k(T-t)]+\displaystyle\int_0^{T-t}\mathrm{sh}k\tau.v(T-\tau)d\tau}{(\delta+1)e^{r(T-t)}+(\delta-1)e^{-r(T-t)}}\right). \tag{23}
$$

为应用方便，将式中的 $x$ 和 $u=\Delta\dot{h}_d$ 变换成 $\Delta s$ 和 $\Delta h_d$ 的形式，可得

$$
u^*=-\frac{2}{R}\left(\frac{\mathrm{sh}r(T-t)\cdot\dfrac{M}{M+Q}\Delta s+r\displaystyle\int_0^{T-t}\mathrm{sh}r\tau.\Delta h_d(T-\tau)d\tau}{(\delta+1)e^{r(T-t)}+(\delta-1)e^{-r(T-t)}}\right). \tag{24}
$$

这就是有限时间积分指标的前馈最优控制。

由前文[1]的讨论可知，当积分指标的积分上限 $T$ 超过 $t+t_d$ 时（图 3），由于 $t+t_d$ 至无穷大区间的厚差信息无法获得，必须忽略，这就导致了误差。现在我们取积分上限为 $T=t+t_d$，则能测取积分区间所有厚差信息。令 $T=t+t_d$，则得前馈最优控制为

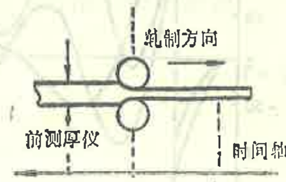



图 3

$$u^* = -\frac{2}{R}\left\{\frac{\operatorname{sh}\gamma t_d\cdot\dfrac{M}{M+Q}\Delta s + r\displaystyle\int_0^{t_d}\operatorname{ch}\gamma\tau\cdot\Delta h_d(t+t_d-\tau)d\tau}{(\delta+1)e^{\gamma t_d}+(\delta-1)e^{-\gamma t_d}}\right\}. \tag{25}$$

这一算法，与美坂佳助等人给出的算法不同，厚差信号不是按指数加权，而是按双曲线余弦进行加权积分。采用这一算法，阶跃扰动的稳态误差为零，即 $\Delta h(\infty)=0$。

这一算法简单，只要将轧辊调节量 $\Delta s$ 乘以常系数，再与加权后的厚差积分（由前测厚仪至辊缝）值求和，即可作为控制信号加于系统，故易于实现在线控制。

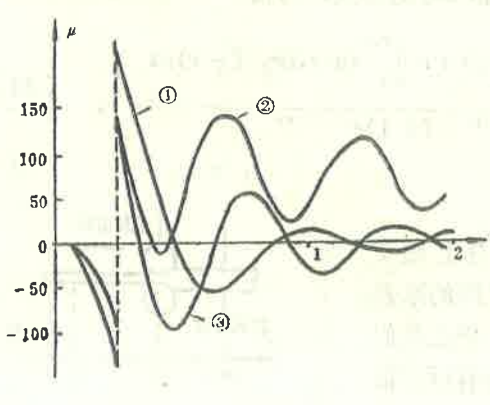
## 三、仿真试验结果

我们按文〔1〕中图所示结构图的系统模型，对于上述算法，在计算机上进行了仿真研究。对于不同延迟时间 $t_d$ 的误差平方和指标，仿真结果列于表1。为了对不同前馈算法进行比较，在表中还列出了普通前馈算法[3]和美坂佳助等人所给前馈最优算法的结果。

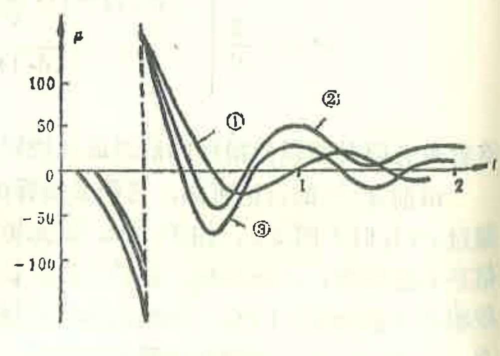
表 1

| 延迟时间 $t_d$ | 指标值 | 常通前馈算法 | 美坂佳助算法 | 本文最优算法 |
|---|---|---|---|---|
| 0.05（0.25） | 绝对值<br>相对值 | 4352.289<br>1.00 | 17899.376<br>4.122 | 3568.171<br>0.819 |
| 0.15（0.35） | 绝对值<br>相对值 | 3502.608<br>1.00 | 3933.804<br>1.123 | 2964.305<br>0.846 |
| 0.50（0.70） | 绝对值<br>相对值 | 3499.903<br>1.00 | 3160.525<br>0.903 | 3162.644<br>0.903 |

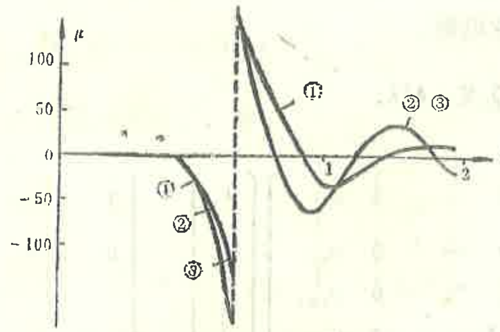
图4给出了三种算法的阶跃扰动响应曲线。图中曲线1为普通前馈算法，曲线2为美坂佳助前馈算法，曲线3为本文所给前馈算法的仿真结果。




a）$t_d=0.05$（0.25）




b）$t_d=0.15$（0.35）




c ) $t_d = 0.5\,(0.7)$

图 4

注：（括号中数字包括测厚仪延迟时间）

由仿真结果可以看出，在延迟时间较大时，美坂佳助最优算法和本文最优算法与普通前馈算法相比，均使误差平方和指标减小。但在延迟时间较小时，美坂佳助算法由于存在稳态误差，使误差平方和指标变坏，而本文所给最优算法仍给出较好的性能指标。

## 四、结　　论

（1） 本文利用有限时间区间的二次型指标，$\int_0^T(\Delta h^2 + Ru^2)d\tau$，给出新的前馈最优控制为

$$u^* = -\frac{2}{R}\left[\frac{\mathrm{sh}\cdot\gamma t_d\cdot\dfrac{M}{M+Q}\Delta s + \gamma\displaystyle\int_0^{t_d}\mathrm{ch}\,\gamma\tau\cdot\Delta h_d(t-t_d-\tau)d\tau}{(\delta+1)e^{\gamma t_d}+(\delta-1)e^{-\gamma t_d}}\right].$$

（2） 本文所给前馈最优控制算法，不论延迟时间长短，均比一般前馈算法给出较好的指标。而在延迟时间较短时，由于不存在阶跃扰动的稳态误差，比美坂佳助等人给出的最优控制算法的指标有很大改善。

（3） 本文所给前馈最优控制算法，算法简单，易于实现在线控制。

## 附　　录

对于式（1）和（3）所示系统和性能指标，由极大值原理，哈密尔顿函数为

$$H = \lambda^T(\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{B}u+\mathbf{C}v) - \frac{1}{2}(\mathbf{X}^T\mathbf{Q}_A\mathbf{X} + u^T\mathbf{R}u), \qquad (A-1)$$

由 $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$，得

$$u = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\lambda, \qquad (A-2)$$

其中 $\lambda$ 是如下伴随方程的解

$$\dot{\lambda} = \mathbf{Q}_A \mathbf{X} - \mathbf{A}^T \lambda,$$

即 (A-3)

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

由于 (A-4)

$$u = R^{-1} B^T \lambda = R^{-1}(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = R^{-1} b \lambda_n, \tag{A-5}$$

将式(A-5)代入(A-4),得

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rb^{-1} a_n u + x_1 \\ -Rb^{-1} a_n u - x_1 + Rb^{-1} a_{n-1} \dot{u} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} Rb^{-1} a_n u + (-1)^{n-1} x_1 + \cdots + (-1)^{i-1} Rb^{-1} a_i u^{(n-i)} \\ + \cdots + Rb^{-1} a_1 u^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

由之可得

$$u^{(n)} - a_1 u^{(n-1)} + a_2 u^{(n-2)} + \cdots + (-1)^n a_n u = (-1)^{(n-1)} R^{-1} b x_1. \tag{A-6}$$

由式(1)有

$$x_1^{(n)} + a_1 x_1^{(n-1)} + a_2 x_1^{(n-2)} + \cdots + a_n x_1 = bu + V. \tag{A-7}$$

将(A-6)逐次求导,代入式(A-7),即可求得最优控制的微分方程表达式。这是一个不含奇阶次的常微分方程,其特征方程为

$$r^{2n} - (a_1^2 - 2a_2) r^{2(n-1)} + \cdots + (-1)^n (a_n^2 + \frac{b^2}{R}) = 0. \tag{A-8}$$

设其根为 $r_1, r_2, \cdots, r_{2n}$, $r_i \neq r_j$, 即不考虑重根的情况,则最优控制为

$$u^*(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \cdots + c_{2n} e^{r_{2n} t} + u_V, \tag{A-9}$$

式中 $c_i$, $i = 1, \cdots, 2n$ 为待定复常数, $u_V$ 为 $u^*(t)$ 的一个特解

$$u_V = D_1 e^{r_1 t}\int_0^t e^{-r_1\tau}V(\tau)d\tau + \cdots + D_{2n} e^{r_{2n}t}\int_0^t e^{-r_{2n}\tau}V(\tau)d\tau, \qquad (A-10)$$

式中 $D_i$, $i=1,2,\cdots,2n$ 是已知复常数，即

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{2n-1} & r_2^{2n-1} & \cdots & r_{2n}^{2n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b/R \end{pmatrix}. \qquad (A-11)$$

由于 $r_1 \neq r_2 \neq \cdots r_{2n}$，上式的逆存在。至此，我们求出最优控制函数。

## 参 考 文 献

〔1〕 杨春江等，带钢轧机的厚度前馈最优控制，自动化学报，**10**，2（1984），105—112.

〔2〕 山下了也、美坂佳助、长谷登、高桥亮一，热延フイードフオワードAGCの 开发，住友金属，**28**，1（1976），16—21.

〔3〕 高阳、李世卿、杨自厚，可逆冷轧机前馈最佳补偿的仿真研究，冶金自动化，1（1983），26—32.

# THE FEEDFORWARD OPTIMAL GAUGE CONTROL OF STEEL STRIP—A NEW ALGORITHM

Yang Chunjiang, Yang Zihou, Li Shiqing

( North - East Institute of Technology, Shenyang )

**Abstract**

By the performance index $\int_0^T(\Delta h^2 + ru^2)d\tau$, We proposed in this paper a new algorithm for the feedforward optimal gauge control of a steel stripmill. By this algorithm the control is the integral of gauge deviation weighted by hyperbolic cosine. It is simple for calculation, easy to be implemented for on line control, and free from steady state error produced by the algorithm given by Yoshisuke Misaka. Simulation results show the correctness of the algorithm and the conclusions given.