第1卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol. 1, No. 4
1984年10月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　October, 1984

控制器能量受限下一类无限维线性系统能控性的研究

陈兆宽　赵克友

（山东大学）

摘　要

本文讨论控制器能量受限下一类无限维线性系统的精确零能控性问题，得到了这类能控性的充分必要条件．最后把这个结果应用于受控抛物型系统．

一、问题的提法

设有如下的无限维线性系统

$$\frac{dz}{dt} = Az + u(t), \quad z(0) = z_0, \tag{1.1}$$

$z(\cdot) \in L_2[0, t_1;\ H]$ 为状态，$u(\cdot) \in L_2[0, t_1;\ H]$ 为控制，H 为实可分 Hilbert 空间，算子 A 为在 H 中作用的有如下形式的纯点谱无界自共轭算子：

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k=1}^{r_n} \phi_{nk} \langle \phi_{nk}, z \rangle, \tag{1.2}$$

λ_n 都是实数且为 A 的特征值，相应于特征值 λ_n 的重数为 r_n，$\{\phi_{nk}\}_{k=1,2,\cdots,r_n}$ 是 A 的相应于 λ_n 的规格化的正交特征向量组，当 n 取一切自然数时，这些特征向量的全体构成H的规格化的完全正交组．设

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > \cdots, \quad \lambda_n \to -\infty, \tag{1.3}$$

算子 A 可生成如下的强连续半群

$$T_t z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \sum_{k=1}^{r_n} \langle \phi_{nk}, z \rangle \phi_{nk},$$

系统（1.1）的广义解为

本文于1982年12月23日收到，1983年7月11日收到修改稿．

$$z(t)=T_t z_0+\int_0^t T_{t-s}u(s)ds\quad ,z(\cdot)\in L_2[0,t_1;H]. \tag{1.4}$$

又设控制受到如下的约束：

$$\int_0^{t_1}\|u(t)\|_H^2\,dt\le l^2. \tag{1.5}$$

定义 1.1　所谓状态 $z_0\in H$ 在控制能量受限下是有限时间精确零能控的，是指存在某一有限时间 $t_1(z_0)$ 及满足条件（1.5）的控制 $u(t)$，使得（1.4）的状态满足

$$z[t_1(z_0)]=O_H. \tag{1.6}$$

若对于 H 中的任意状态 z_0，上面的叙述都成立，则称系统（1.4）是在控制能量受限下有限时间精确零能控的，

二、主　要　结　果

定理 2.1　系统（1.4）在任何固定时间区间 $[0,t_1]$ 上在控制不受限时总是精确零能控的。

证　从略.

定理 2.2　对于系统（1.4），在固定时间区间 $[0,t_1]$ 上将状态 $z(t)$ 从 z_0 转移到原点的最小能量控制是存在的，这个制控有如下的表达式：

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{r_n}u_{nk}(t)\phi_{nk}\Big),\quad u_{nk}(t)\in L_2[0,t_1],$$

$$u_{nk}(t)=\frac{-\langle z_0,\phi_{nk}\rangle}{\left[\int_0^{t_1}e^{-\lambda_n t}\,dt\right]^2}e^{-\lambda_n t}\ ,\quad k=1,2,\cdots,r_n\quad n=1,2,\cdots.$$

最小能量为

$$\|u(t)\|^2_{L_2[0,t_1;H]}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{r_n}|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2}{\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n t}dt}.$$

证　设 $u(t)$ 是任一将状态从 z_0 在 t_1 时刻转移到原点的一个控制，则

$$T_{t_1}z_0+\int_0^{t_1}T_{t-s}\ u(s)\,ds=O_H. \tag{2.1}$$

$$\because\quad T_{t_1}z_0=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n t_1}\Big(\sum_{k=1}^{r_n}\langle z_0,\phi_{nk}\rangle\phi_{nk}\Big),$$

$$T_{t_1-s}u(s)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n(t_1-s)}\left(\sum_{k=1}^{r_n}u_{nk}\,\phi_{nk}\right),$$

这理：$u_{nk}(s)=\langle u(s),\phi_{nk}\rangle$.

于是（2.1）变成

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n t_1}\left(\sum_{k=1}^{r_n}\langle z_0,\phi_{nk}\rangle\phi_{nk}\right)+\int_0^{t_1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n(t_1-s)}\left(\sum_{k=1}^{r_n}u_{nk}(s)\phi_{nk}\right)ds$$
$$=O_H. \tag{2.2}$$

可以证明（2.2）式中左端第二项的积分号与求和号是可以交换的（证明从略），于是（2.2）式变成

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n t_1}\left[\sum_{k=1}^{r_n}\phi_{nk}\left(\langle z_0,\phi_{nk}\rangle+\int_0^{t_1}e^{-\lambda_n s}u_{nk}(s)ds\right)\right]=0.$$

上式成立的充要条件是下面的一串等式成立：

$$\langle z_0,\phi_{nk}\rangle=-\int_0^{t_1}e^{-\lambda_n s}u_{nk}(s)ds,\quad k=1,2,\cdots,r_n\quad n=1,2,\cdots. \tag{2.3}$$

现在令

$u^*_{nk}(s)=Ke^{-\lambda_n s}$，K为待定常数．代入（2.3）式得：

$$\langle z_0,\phi_{nk}\rangle=-K\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n s}ds,$$

$$\therefore\quad K=-\langle z_0,\phi_{nk}\rangle\Big/\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n s}ds,$$

$$\therefore\quad u^*_{nk}(s)=-\langle z_0,\phi_{nk}\rangle e^{-\lambda_n s}\Big/\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n s}ds, \tag{2.4}$$

$u^*_{nk}(s)$满足方程（2.3），令

$$u^*(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r_n}u^*_{nk}(t)\phi_{nk}\right),$$

由表达式（2.4）及正项级数的比较判别法，容易证明对于每一$t\in[0,t_1]$，如下的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r_n}|u^*_{nk}(t)|^2\right) \tag{2.5}$$

是收敛的，因此$u(t)\in H$，由于

$$\int_0^{t_1}\|u^*(t)\|_H^2dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r_n}\int_0^{t_1}|u_{nk}^*(t)|^2dt\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r_n}|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2\Big/\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n t}dt\right).$$

但是：

$$|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2\Big/\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n t}dt\le|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2\Big/\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_1 t}dt,$$

$$\therefore\quad\int_0^{t_1}\|u^*(t)\|_H^2dt\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r_n}|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2\right)\Big/\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_1 t}dt,$$

$\therefore$　$u_*(\cdot)\in L_2[0,t_1;H]$，而且 $u^*(t)$ 能将状态从 z_0 在 t_1 时刻转移到原点。

下面证明任一能将状态从 z_0 在 t_1 时刻转移到原点的控制 $u(t)$ 的能量一定大于或等于 $u^*(t)$ 的能量。事实上设 $u(\cdot)\in L_2[0,t_1;H]$ 是任一满足如上条件的控制：

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r_n}u_{nk}(t)\phi_{nk}\right),$$

则 $u_{nk}(t)$ 一定满足方程（2.3），于是

$$|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2=\left|\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n s}u_{nk}(s)ds\right|^2\le\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n s}ds\cdot\int_0^{t_1}|u_{nk}(s)|^2ds.$$

$$\therefore\quad\|u_{nk}(t)\|^2_{L_2[0,t_1]}=\int_0^{t_1}|u_{nk}(t)|^2dt\ge|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2\Big/\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n s}ds,$$

注意：

$$\|u_{nk}^*(t)\|^2_{L_2[0,t_1]}=\int_0^{t_1}|u_{nk}^*(t)|^2dt=|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2\Big/\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n s}ds,$$

及

$$\|u(\cdot)\|^2_{L_2[0,t_1;H]}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r_n}\|u_{nk}(t)\|^2_{L_2[0,t_1]}\right),$$

$$\therefore\quad\|u(\cdot)\|^2_{L_2[0,t_1;H]}\ge\|u^*(\cdot)\|^2_{L_2[0,t_1;H]}.$$

也即证明了 $u^*(\cdot)\in L_2[0,t_1;H]$ 确实是能将状态从 z_0 在 t_1 时刻转移到原点且具有最小能量的控制。定理2.2证毕。

定理 2.3　在控制能量受到（1.5）式的限制下，状态 $z_0\in H$ 在 $[0,t_1]$ 上精确零能控的充要条件是：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{r_n}|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2\right)\Big/\int_0^t e^{-2\lambda_n t}dt\right]\le l^2, \tag{2.6}$$

证 从略.

定理 2.4 在控制能量受到（1.5）的约束下，系统（1.4）有限时间精确零能控的充要条件是算子A的所有特征值 λ_n 都是非正的，即

$$\lambda_n \le 0. \tag{2.7}$$

证 必要性：下面用反证法来证明（2.7）式．若不然，于是至少有一个特征值是正的，例如：

$$\lambda_1 > 0.$$

现取某一状态 z_0 使它满足

$$\left(\sum_{k=1}^{r_1}|\langle z_0,\phi_{1k}\rangle|^2\right)\Big/\int_0^{\infty} e^{-2\lambda_1 t}dt > l^2,$$

这样的 z_0 一定存在的．下面证明 z_0 在控制能量受到（1.5）的约束时，在任何有限时间区间$[0,t_1]$上都不是精确零能控的．这是因为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{r_n}|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2}{\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n t}dt}\ge\frac{\sum_{k=1}^{r_1}|\langle z_0,\phi_{1k}\rangle|^2}{\int_0^{\infty}e^{-2\lambda_1 t}dt}>l^2,$$

它不满足定理2.4的条件．于是必要性得证．

充分性：设满足条件（2.7）．又设 z_0 是任一固定的状态．下面证明，一定存在某一时刻 t_1，使z_0在$[0,t_1]$区间上是控制能量受限下有限时间精确零能控的状态，考察级数

$$F(t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r_n}|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2\Big/\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n t}dt\right) \tag{2.8}$$

这个级数关于参数 $t_1\in[1,+\infty)$是一致收敛的．事实上，设 $t_1>1$，

$$\because\quad\frac{\sum_{k=1}^{r_n}|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2}{\int_0^{t_1}e^{-2\lambda_n t}dt}\le\frac{\sum_{k=1}^{r_n}|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2}{\int_0^{1}e^{-2\lambda_1 t}dt},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r_n}|\langle z_0,\phi_{nk}\rangle|^2\Big/\int_0^1 e^{-2\lambda_1 t}dt\right)$ 是收敛的，它就是级数（2.8）的优

级数，于是当 $t_1 \to +\infty$ 时，可以逐项取极限得：

$$\lim_{t_1 \to +\infty} F(t_1) = \lim_{t \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{r_n} |\langle z_0, \phi_{nk} \rangle|^2}{\int_0^{t_1} e^{-2\lambda_n t} dt}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{r_n} |\langle z_0, \phi_{nk} \rangle|^2}{\lim_{t_1 \to +\infty} \int_0^{t_1} e^{-2\lambda_n t} dt},$$

由于 $\lambda_n \le 0$，

$$\therefore \quad \lim_{t_1 \to +\infty} \int_0^{t_1} e^{-2\lambda_n t} dt \to +\infty,$$

$$\therefore \lim_{t_1 \to +\infty} F(t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

于是对于给定的 l^2，必存在某一充分大的 t_1，使

$$F(t_1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{r_n} |\langle z_0, \phi_{nk} \rangle|^2 \Big/ \int_0^{t_1} e^{-2\lambda_n t} dt \right) \le l^2 \tag{2.9}$$

由（2.9）式与定理 2.3 立即可知 z_0 在控制能量受到（1.5）的约束下是有限时间精确零能控的。由于在证明中 z_0 可以是空间 H 中的任一元素，故本定理的结论是成立的。充分性得证。　定理 2.4 证毕。

上面的理论结果可应用于如下的受控抛物型系统：

$$z_t = z_{\xi\xi} + u(\xi, t), \quad z(0,t) = z(1,t) = 0, \tag{2.10}$$

设 $H = L_2[0,1]$，与这个系统相联系的半群为：

$$(T_t z)(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} (\sqrt{2} \sin n\xi\pi) \int_0^1 \sqrt{2} (\sin 2\pi y) z(y) dy,$$

它的生成算子为

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2\pi^2) \sqrt{2} \sin n\pi\xi \int_2^1 \sqrt{2} (\sin n\pi y) z(y) dy,$$

A 是一个纯点谱算子，它的特征值 λ_n 为：

$$\lambda_n = -n^2\pi^2 < 0, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{2.11}$$

相应于特征值 λ_n 的特征向量为

$$\phi_n = \sqrt{2} \sin n\pi\xi.$$

由（2.11）式及定理 2.4 的结论可知，系统（2.10）在控制能量受到如下约束

$$\|u(\xi,t)\|^2_{L_2[0,t_1;H]} \le l^2$$

时是有限时间精确零能控的，值得注意的是，数 l^2 可以任意小，结论仍是正确的，也即不管控制的能量怎样小，它总可以在有限时间内将状态 z_0 转移到原点，这是这个系统的一个特殊性质，它在工程上是十分有用的。

参 考 文 献

〔1〕 Curtain, R. F., A. J. Prichard, Infinite Dimensional Linear System Theory, Springer-Verlag (1978).

〔2〕 Fujimoto, A., Y. Uno, Optimal Control of Linear Continuous Systems with Multiple Control Constraints, Intern. J. Control, **25**, 2 (1977).

〔3〕 陈云峰、赵怡，线性系统的能控区域及其在最优控制中的某些应用，中山大学学报，4（1980），29—38.

〔4〕 Lions, J. L., Optimal Control of System Governed by Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York (1971).

〔5〕 那汤松 И. П.，实变函数论，高等教育出版社（1955）.

RESEARCH ON THE CONTROLLABILITY OF A CLASS OF INFINITE DIMENSIONAL LINEAR SYSTEMS WITH CONTROL ENERGY CONSTRAINT

Chen Zhaokuan, Zhao keyou

(Shandong Univeasity, Jinan)

Abstract

In this paper the problem of the controllability of a class of infinite dimensional linear systems with control energy constraint is discussed. The necessary and sufficient condition for this problem has been obtained. The result is applied to the system governed by parabolic partial differential equation.