第1卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol.1, No.4
1984年10月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　October, 1984

二维系统的能达性能观性与综合

陈文德
（中国科学院系统科学研究所）

摘　要

本文提出了二维系统“环上能达能观”与“强形式能达能观”的概念；并应用模论、理想论与代数几何的方法得到了这两种能达能观性的简单判据以及用补偿器综合稳定系统的充分条件.

一、引　言

二维系统理论在自动控制、图象处理、网络综合等工程领域有重要的应用；对其深入研究需要运用抽象代数、代数几何、多复变函数论、函数逼近论等数学工具. 近十余年来，由于工程应用的推动，人们对它的兴趣日益增大，取得了不少新成果[1]. 但是由于它与一维系统理论有质的不同，难度亦大得多，所以至今尚有一些基本问题未完全解决. 一维系统理论中强有力的状态变量描述方法引入二维系统后[2]，围绕着线性二维系统的能达性、能观性已有一些探讨，提出了形式能达[3][4]、全局能达[4]、局部能达[2]等概念，并研究了最小实现问题. 但在这些概念指导下，最小实现的存在性还只是一个猜想，实现问题总的来说还解决得不完善[4]；对于图象处理，自动控制系统中提出来的综合问题亦未彻底解决[5]. 本文用模论等代数工具探讨了单变量线性二维系统的能达能观性与综合问题.

二、模论方法与“环上能达能观性”

单变量线性定常二维离散系统（例如二维递推数字滤波器）可用二维 z 变换表示如下：

$$Y(z,\omega)=G(z,\omega)\,u(z,\omega), \tag{1}$$

这里，

$$Y(z,\omega)=\sum_{i,j=-\infty}^{\infty} y_{ij}\,z^{-i}\omega^{-j}, \quad u(z,\omega)=\sum_{i,j=-\infty}^{\infty} u_{ij}\,z^{-i}\omega^{-j} \tag{2}$$

本文于1983年3月16日收到. 1983年7月20日收到修改稿.

分别为输出、输入数据阵列 y_{ij}、$u_{ij}(\in R)$ 的 z 变换，$G(z,\omega)$ 为传递函数，记为

$$G(z,\omega)=N(z,\omega)/D(z,\omega),$$

其中 $N(z,\omega)$、$D(z,\omega)\in R[z,\omega]$、$R$ 为实数域。显然 $R[z,\omega]=R[z][\omega]$。把 $N(z,\omega)$ 看作 $R[z][\omega]$ 中元时记为 $\overline{N}(\omega)$；$\overline{D}(\omega)$ 的定义类似。记 $\overline{D}(\omega)$ 中 ω 的最高次幂的系数为 $a_n(z)$。当 $a_n(z)$ 对 z 的次数 $m\geq\overline{D}(\omega)$ 中其它项及 $\overline{N}(\omega)$ 各项的系数对 z 的次数时，称分式 $G(z,\omega)$ 为"真"的，本文第二节中，设 $G(z,\omega)$ "真"，第三节中不设 $G(z,\omega)$ "真"。 (3)

定义以 z 为文字的实系数真有理分式环 R_z：

$$R_z\triangleq\{b(z)/a(z)\,|\deg a(z)\geq\deg b(z)\}. \tag{4}$$

再用 $\widetilde{R}_z$ 记幂级数 $\sum_{i=0}^{\infty}x_i z^{-i}$、$x_i\in R$、形成的环。显然 $R_z\subset\widetilde{R}_z$。文献[7]提出了如下"两步实现"的思想。因为已设 $G(z,\omega)$ "真"，所以只要分子分母同除以 $a_n(z)$，即可展成幂级数：

$$G(z,\omega)=\sum_{i=0}^{\infty}G_i(z)\,\omega^{-i},\quad G_i(z)\in R_z. \tag{5}$$

如果环 $\widetilde{R}_z$ 上的线性状态系统：

$$\Sigma:\ \begin{cases}\mathbf{X}_{k+1}=A(z)\,\mathbf{X}_k+B(z)\,u_k,\quad \mathbf{X}_0=0,\\ \mathbf{Y}_k=C(z)\,\mathbf{X}_k+D(z)\,u_k,\end{cases} \tag{6}$$

满足

$$G_0(z)=D(z),\quad G_i(z)=C(z)\,A(z)^{i-1}B(z),\quad i=1,2,\cdots \tag{7}$$

则称 Σ 为 $G(z,\omega)$ 的第一步实现。(6)式中 $A(z)\in R^{n\times n}$，$B(z)\in R_z^{n\times 1}$，$C(z)\in R_z^{1\times n}$，$D(z)\in R_z$，$\mathbf{X}_k\in\widetilde{R}_z^n$，$u_k$，$y_k\in\widetilde{R}_z$。二维系统著名的 Roesser 状态空间模型[2]：

$$S:\ \begin{cases}\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{k+1,h}\\ \mathbf{S}_{k,h+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{kh}\\ \mathbf{S}_{kh}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}u_{kh}\\ y_{kh}=C_1\mathbf{R}_{kh}+C_2\mathbf{S}_{kh}\end{cases} \tag{8}$$

可看作是某 $G(z,\omega)$ 的第二步实现，且相应的 Σ 与 S 之间有如下关系：

$$\begin{cases}A(z)=A_2[zI-A_4]^{-1}A_3+A_1,\ B(z)=A_2[zI-A_4]^{-1}B_2+B_1,\\ C(z)=C_2[zI-A_4]^{-1}A_3+C_1,\ D(z)=C_2[zI-A_4]^{-1}B_2.\end{cases} \tag{9}$$

我们先把 Furman[6] 发展的域上系统理论的模论方法推广到(5)、(6)式描写的环上系统中去。记 $\widetilde{D}(\omega)=\overline{D}(\omega)/a_n(z)$，$\widetilde{N}(\omega)=\overline{N}(\omega)/a_n(z)$。显然，$\widetilde{D}(\omega)\in\widetilde{R}_z[\omega]$，且是首一多项式，所以对任一个 $f(\omega)\in\widetilde{R}_z[\omega]$，可按多项式除法除以 $\widetilde{D}(\omega)$，得

$$f(\omega)=q(\omega)\widetilde{D}(\omega)+r(\omega), \tag{10}$$

其中 $\deg r(\omega)<n$. 先用式子：$\pi\dfrac{f(\omega)}{\widetilde{D}(\omega)}=\dfrac{r(\omega)}{\widetilde{D}(\omega)}$ 定义映象 π，再定义映象 π_D: $\widetilde{R}_z[\omega]\longrightarrow\widetilde{R}_z[\omega]$

$$\pi_D f(\omega)=r(\omega), \tag{11}$$

记 π_D 的值域空间为

$$K_D=\{\pi_D f(\omega)\mid f(\omega)\in\widetilde{R}_z[\omega]\}, \tag{12}$$

K_D 就是状态空间模（由于本文仅讨论单变量系统，这里模实际上已特殊化，成为同余类环）. 记 $\widetilde{D}(\omega)=\sum_{i=0}^{n}a_i(z)\omega^i$，$\widetilde{N}(\omega)=\sum_{i=0}^{n-1}b_i(z)\omega^i+b_n(z)\widetilde{D}(\omega)$. 我们定义四个映象：

（Ⅰ）A: $K_D\longrightarrow K_D$，$Ar(\omega)=\pi_D(\omega r(\omega))$，$r(\omega)\in K_D$.

（Ⅱ）B: $\widetilde{R}_z\longrightarrow K_D$，$B_u=u\,\pi_D\widetilde{N}(\omega)$，$u\in\widetilde{R}_z$，$u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i z^{-i}$.

（Ⅲ）C: $K_D\longrightarrow\widetilde{R}_z$，$Cr(\omega)=H_1$，这里 $r(\omega)\in K_D$，$r(\omega)/\widetilde{D}(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}H_i\omega^{-i}$,

（以后我们记 $H_i\triangleq\{r(\omega)/\widetilde{D}(\omega)\}_i$）.

（Ⅳ）D: $\widetilde{R}_z\longrightarrow\widetilde{R}_z$，$Du=b_n(z)u$，$u\in\widetilde{R}_z$.

记 K_D 中的元 $r(\omega)\triangleq\sum_{i=0}^{n-1}r_i(z)\omega^i$，如果认为状态的这种多项式形式的表示，与其系数形成的向量 $[r_0(z),r_1(z),\cdots,r_{n-1}(z)]^T$ 的表示是同一的（等价的），则由上述定义（Ⅰ）—（Ⅳ）可知这四个映象与四个矩阵同一：

$$\left\{\begin{aligned}&A\longleftrightarrow\begin{bmatrix}0&\cdots&0&-a_0(z)\\1&\cdots&0&-a_1(z)\\&\ddots&&\vdots\\0&\cdots&1&-a_{n-1}(z)\end{bmatrix}\triangleq A(z),\quad B\longleftrightarrow\begin{bmatrix}b_0(z)\\b_1(z)\\\vdots\\b_{n-1}(z)\end{bmatrix}\triangleq B(z),\\&C\longleftrightarrow[0\ \cdots\ 0\ 1]\triangleq C(z),\quad D\longleftrightarrow b_n(z)\triangleq D(z).\end{aligned}\right. \tag{13}$$

我们把从 $G(z,\omega)$ 出发用模论方法定义的映象组：$\{A,B,C,D\}$ 对应的系统记为 Σ_1：

$$\Sigma_1:\ \begin{cases}X_{k+1}=AX_k+Bu_k,\quad X_0=0,\\y_k=CX_k+Du_k,\end{cases} \tag{14}$$

这里 $u_k, y_k \in \widetilde{R}_z$, $X_k \in K_D$。为本文方便，今后常把（13）式的 $A(z)$、$B(z)$、$C(z)$、$D(z)$ 及其对应的系统 Σ 看作与 A、B、C、D、Σ_1 是同一个东西。下面根据文献〔7〕给出的交换环上系统能达能观的定义，来给出 Σ_1 能达能观定义。

定义 1 当形如 $\sum_{i=0}^{n-1} A^i B u_i$, $u_i \in \widetilde{R}_z$, 的状态张满状态空间时，(A,B) 为能达对；若从 $CA^i r(\omega)=0$, $0 \le i \le n-1$, $r(\omega) \in K_D$, 能推出 $r(\omega)=0$, 则 (A,C) 为能观对。

由 A、B、C、D 的定义，易知对任意 $u \in \widetilde{R}_z$, 有

$$CA^iBu = CA^i\pi_D\widetilde{N}(\omega)u = \left\{\frac{1}{\widetilde{D}(\omega)}\pi_D\omega^i\widetilde{N}(\omega)u\right\}_1$$

$$= \left\{\frac{1}{\widetilde{D}(\omega)}\pi_D\widetilde{D}(\omega)\omega^i G(z,\omega)u\right\}_1 = \{\pi\omega^i G(z,\omega)u\}_1 = G_{i+1}(z)u, \qquad (15)$$

这里应用了关系式 $\pi_D f(\omega) = \widetilde{D}(\omega)\pi\frac{1}{\widetilde{D}(\omega)}f(\omega)$。另外 $G_0(z) = b_n(z) = D(z)$ 是显然的。（15）、（13）、（7）式说明 Σ_1 是 $G(z,\omega)$ 的一个第一步实现。下面进一步证明这个实现是能观的。设 $r(\omega) \in K_D$, 且 $CA^i r(\omega)=0$, $0 \le i \le n-1$. 由于对 R_z 上的阵 $A(z)$ 亦有 Cayley－Hamilton[7] 定理成立，所以 $CA^i r(\omega)=0$, $i=0,1,\cdots,n-1,n,\cdots$ 即对所有 $i \ge 0$, 都有

$$CA^i r(\omega) = \left\{\frac{1}{\widetilde{D}(\omega)}\pi_D\omega^i r(\omega)\right\}_1 = \left\{\pi\omega^i\frac{\gamma(\omega)}{\widetilde{D}(\omega)}\right\}_1 = 0. \qquad (16)$$

于是 $\{r(\omega)/\widetilde{D}(\omega)\}_{i+1}=0$, $i \ge 0$, 又因 $\deg r(\omega) < n$, 因此 $r(\omega)/\widetilde{D}(\omega)=0$, $r(\omega)=0$, (A,C) 能观。总结上述，可得如下定理：

定理 1 用模论方法定义的环上系统 Σ_1（参见（14）及定义（Ⅰ）—（Ⅳ））是二维系统 $G(z,\omega)$ 的第一步实现，且这个实现是能观的。

记 $Q(z) \triangleq [B(z) \vdots A(z)B(z) \vdots \cdots \vdots A^{n-1}(z)B(z)]$, 由文献〔7〕易知：$A(z)$、$B(z)$ 能达的充要条件是：存在 $L(z) \in \widetilde{R}^{n\times n}$, 使

$$Q(z)L(z) = I_n, \qquad (17)$$

这里 I_n 为单位阵。下面我们提出比（17）更简单的能达判据及其频域形式。

定理 2 环上系统 Σ_1 能达的充要条件是以下各条件之一：

（Ⅰ）存在 $u_i \in \widetilde{R}_z$, $0 \le i \le n-1$, 使

$$Q(z)[u_0,u_1,\cdots,u_{n-1}]^\tau = [1,0,\cdots,0]^\tau. \qquad (18)$$

（Ⅱ） $$\Delta_{1i}(z)/\det Q(z) \in R_z, \quad 1 \le i \le n, \qquad (19)$$

这里 $\Delta_{1i}(z)$ 表示 $Q(z)$ 第一行第 i 列的代数余子式。记 $\Delta_{1i}(z) = \alpha_i/\beta_i$, $\det Q(z) = \alpha/\beta$,

$\alpha_i,\beta_i,\alpha,\beta\in R[z]$，（19）就是

$$\deg \alpha_i\beta\leq\deg\beta_i\alpha,\quad 1\leq i\leq n. \tag{20}$$

（Ⅲ）存在 $\widetilde{V}(\omega),\widetilde{W}(\omega)\in\widetilde{R}_z[\omega]$，使

$$\widetilde{V}(\omega)\widetilde{N}(\omega)+\widetilde{W}(\omega)\widetilde{D}(\omega)=1. \tag{21}$$

用 $[x]$ 表示环 $\widetilde{R}_z[\omega]$ 中，由元素 x 生成的理想，则（21）即

两个理想 $[\widetilde{N}(\omega)]$ 与 $[\widetilde{D}(\omega)]$ 间无公因理想。　（22）

证　用 $\Longleftrightarrow$ 表示条件等价。先证（17）$\Longleftrightarrow$（18）。（17）$\Longrightarrow$（18）显然。反之，若（18）成立，其模论表示为

$$\sum_{i=0}^{n-1}A^iBu_i=1.$$

上式左边是 K_D 中元，采用 $\widetilde{R}_z(\omega)$ 中的多项式来表示；右边自然数 1 亦采用同样表示，即 $1=\sum_{i=0}^{n-1}r_i(z)\omega^i$，其中 $r_0(z)=1$，$r_i(z)=0$，$l\leq i\leq n-1$。上式详细写出就是

$$\pi_D\left(\sum_{i=0}^{n-1}u_i\omega^i\widetilde{N}(\omega)\right)=1. \tag{23}$$

由 π_D 定义知 $\pi_D\widetilde{D}(\omega)=0$，即

$$\pi_D\omega^n=-\sum_{i=0}^{n-1}a_i(z)\omega^i. \tag{24}$$

令

$$l_{ij}=\begin{cases}u_i, & j=0,\\ l_{i-1,j-1}-a_i(z)l_{n-1,j-1}, & 1\leq j\leq n-1,\end{cases}\quad 0\leq i\leq n-1 \tag{25}$$

其中　$l_{ij}=0$，$i<0$；则可证：

$$\pi_D\left(\sum_{i=0}^{n-1}l_{ij}\omega^i\widetilde{N}(\omega)\right)=\omega^j,\quad 0\leq j\leq n-1. \tag{26}$$

用归纳法证，$j=0$ 时（23）即（26）；设 $j=j_0$ 时（26）成立：

$$\pi_D\left(\sum_{i=0}^{n-1}l_{ij_0}\omega^i\widetilde{N}(\omega)\right)=\omega^{j_0}.$$

在上式两边同乘 ω，并用 π_D 作用，再由（24—25）得

$$\pi_D\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_{ij_0}\omega^{i+1}\widetilde{N}(\omega)\right)=\pi_D\left(\sum_{i=0}^{n-2} l_{ij_0}\omega^{i+1}\widetilde{N}(\omega)-\sum_{i=0}^{n-1} a_i(z)l_{n-1,j_0}\omega^i\widetilde{N}(\omega)\right)$$

$$=\pi_D\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(l_{i-1,j_0}-a_i(z)l_{n-1,j_0}\right)\omega^i\widetilde{N}(\omega)\right)$$

$$=\pi_D\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_{i,j_0+1}\,\omega^i\widetilde{N}(\omega)\right)=\omega^{j_0+1},$$

即 $j=j_0+1$ 时（26）式成立. 用 $l_{i-1,j-1}$ 作阵的 i 行 j 列元素来定义 $L(z)$ 阵，显然这 $L(z)\in\widetilde{R}_z^{n\times n}$. 又因 $\omega^{j_0}\longleftrightarrow[0\cdots0\overset{j_0\text{个}}{1}\ 0\cdots0]^T$，所以（26）式即（17）式.

下面证（Ⅰ）$\Longleftrightarrow$（Ⅱ）. (19) $\Longrightarrow$ (18)：由 Cramer 法则，知取 $u_i=\Delta_{1i}(z)/\det Q(z)$ 时(18)满足. (18) $\Longrightarrow$（19）：由（18）知（17）成立，故 $\det Q(z)\neq0$. 因为 R_z 是主理想整区[7]，根据主理想整区上的矩阵的等价标准形定理[10]，必存在 $T_1(z),T_2(z)\in R_z^{n\times n}$，使 $T_1(z)Q(z)T_2(z)=\wedge(z)$；这里 $\wedge(z)$ 为对角阵，$\det T_1(z)$ 与 $\det T_2(z)$ 为 R_z 中可逆元. 再注意到 R_z 中无零因子，于是易知方程（18）在 R_z 的商域上有唯一解；根据有理幂级数的定义，知（18）的解还是有理幂级数. 于是（18）式中不仅有 $u_i\in\widetilde{R}_z$，且有 $u_i\in R_z$. 既然 $\Delta_{1i}(z)/\det Q(z)$ 与 u_i 都是(18)的解，而这个解唯一，所以 $u_i=\Delta_{1i}(z)/\det Q(z)$，$\Delta_{1i}(z)/\det Q(z)\in R_z$，（19）成立.（19）$\Longleftrightarrow$（20）是显然的.

再证 （Ⅰ）$\Longleftrightarrow$（Ⅲ）.（18）$\Longrightarrow$（21）：若（18）成立，在（23）中记 $\widetilde{v}(\omega)=\sum_{i=0}^{n-1}u_i\omega^i$，则 $\widetilde{V}(\omega)\in\widetilde{R}_z[\omega]$，由（23）式与 π_D 定义，知存在 $\widetilde{W}(\omega)\in\widetilde{R}_z[\omega]$，使

$$\widetilde{V}(\omega)\,\widetilde{N}(\omega)+\widetilde{W}(\omega)\,\widetilde{D}(\omega)=1.$$

（21）$\Longrightarrow$（18）：若（21）式成立，在（21）式两边作用 π_D 得

$$\pi_D(\pi_D\widetilde{V}(\omega))\,\widetilde{N}(\omega)=1.$$

记 $\pi_D\widetilde{V}(\omega)=\sum_{i=0}^{n-1}u_i\omega^i$，易知上式与（18）式等价. 最后应用理想论的知识[8]，易知（21）$\Longleftrightarrow$（22）. 定理证毕.

注记 1 对偶地亦可先用模论求得能达实现，再得到几个能观判据，详略. 定理 1 指出 Σ_1 是 $G(z,\omega)$ 的能观实现，所以定理 2 亦是 Σ_1 能达且能观的充要条件. 注意：一维系统能达能观对应的分子分母无公因子（互质）概念，这里被更深刻的无公因理想（见(22)）概念代替了.

注记 2　文献〔7〕指出：用 Hankel 阵方法得到的第一步实现 Σ_1 是能达能观的，本文的结果与〔7〕不同：Σ_1 可以不能达，从而保留了〔$\widetilde{N}(\omega)$〕与〔$\widetilde{D}(\omega)$〕的公因理想所含的重要信息。定理 2 的判据（18）（19）比（17）简单得多，易于计算。

例 1　$$G(z,\omega)=\frac{1}{z\omega^2+z}.$$

易知，$\widetilde{N}(\omega)/\widetilde{D}(\omega)=\frac{1}{z}\Big/(\omega^2+1)$。用模论按（13）式求得能观实现：

$A(z)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$B(z)=\begin{bmatrix}\frac{1}{z}\\ 0\end{bmatrix}$，$C(z)=[0\ \ 1]$，$D(z)=0$。显然（$A$，$C$）能观。但

$\Delta_{11}/\det Q(z)=z\notin R_z$，故（$A$,$B$）不能达。理想$\left[\frac{1}{z}\right]$与〔$\omega^2+1$〕间有公因理想：$\left[\frac{1}{z},\ \omega^2+1\right]$，这里$\left[\frac{1}{z},\ \omega^2+1\right]$表示$\frac{1}{z}$与 ω^2+1 两个元生成的理想。

注记 3　对称地，二维系统亦可看作环 $\widetilde{R}_\omega$ 上的系统，$\widetilde{R}_\omega$ 定义类似于 $\widetilde{R}_z$，其它记号定义亦类似，仅把 ω 与 z 对换。与定理 1、2对称地有定理 1′、2′ 成立，不详述。

定义 2　（8）式所示的二维系统 S 对应的传递函数为

$$G(z,\omega)=[C_1\ \ C_2]\begin{bmatrix}\omega I-A_1 & -A_2\\ -A_3 & zI-A_4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\frac{N(z,\omega)}{D(z,\omega)},\tag{27}$$

其中 $N(z,\omega)$ 与 $D(z,\omega)$ 间未经消去公因子运算。若环 $\widetilde{R}_z[\omega]$ 中的理想〔$\widetilde{N}(\omega)$〕，〔$\widetilde{D}(\omega)$〕间无公因理想，且 $\widetilde{R}_\omega[z]$ 中的理想〔$\widetilde{N}(z)$〕、〔$\widetilde{D}(z)$〕间无公因理想，则称 S 为“环上能达能观”的。这个概念的物理意义是：$G(z,\omega)$ 在 $\widetilde{R}_z$ 环与 $\widetilde{R}_\omega$ 环上的第一步实现都是能达能观的。

定理 3　当且仅当

$$\Delta_{1i}(z)/\det Q(z)\in R_z,\ \Delta_{1j}(\omega)/\det Q(\omega)\in R_\omega,\ 1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m\tag{28}$$

时二维系统 S 是环上能达能观的，这里各记号定义参见（19）、（17）、（13）、（27）式及注记 3。若 S 是环上能达能观的，则 S 必然是形式能达能观的。

证　定理的前半部分由定义 2、定理 2 立得。由文献〔4〕知：S 形式能达能观 $\Longleftrightarrow$ $N(z,\omega)$ 与 $D(z,\omega)$ 在环 $R[z,\omega]$ 上无公因子。下面用反证法，设有公因子 $\varphi(z,\omega)$，若它含文字 ω，记 $\widetilde{\varphi}(\omega)\triangleq\bar{\varphi}(\omega)/a_n(z)$，则 $\widetilde{\varphi}(\omega)$ 生成的理想必为〔$\widetilde{N}(\omega)$〕、〔$\widetilde{D}(\omega)$〕的公因理想，与假设矛盾；若 $\varphi(z,\omega)$ 含文字 z，类似地可推出矛盾，定理证毕。

我们亦可类似形式能达那样[4]，更细致地分别讨论“环上能达”与“环上能观”及其判据，详略。

三、"强形式能达能观"与综合

熟知：一维系统中，如传递函数的分子分母无公因子，则可用补偿器任意配置极点（从而使系统镇定）. 在图象处理的自动控制系统中（例如处理从月球发回照片的电信号装置[5]），提出了如下类似问题：如何设计一个二维补偿器 $C(z,\omega)=V^*(z,\omega)/W^*(z,\omega)$，使传递函数为 $G(z,\omega)=N(z,\omega)/D(z,\omega)$ 的二维装置，串联补偿器 $C(z,\omega)$ 后，成为具有所需性能的系统. 文献〔5〕已把这问题归结为 $G(z,\omega)$ 是否有互质分式表示？即是否存在 $N(z,\omega)$，$D(z,\omega)$ 使 $G(z,\omega)=N(z,\omega)/D(z,\omega)$，且有 $V(z,\omega)$，$W(z,\omega)\in R[z,\omega]$，满足

$$V(z,\omega)N(z,\omega)+W(z,\omega)D(z,\omega)=1. \tag{29}$$

文献〔5〕认为：一般说来这问题尚未彻底解决.

为研究（29）式我们进一步运用无公因理想的观点. 由理想论知识[8]，易知（29）式 $\Longleftrightarrow$ 环 $R[z,\omega]$ 中两个理想 $[N(z,\omega)]$ 与 $[D(z,\omega)]$ 间无公因理想. 既然由 $N(z,\omega)$ 与 $D(z,\omega)$ 间无公因子定义了形式能达能观，所以我们可以类似引入以下定义.

定义 3 二维系统 S 如（8）式所示，其传递函数如（27）式所示，若环 $R[z,\omega]$ 中两个理想 $[N(z,\omega)]$、$[D(z,\omega)]$ 间无公因理想，称 S 为"强形式能达能观"的. 显然，若 S 是强形式能达能观的，则 S 一定是形式能达能观的.

引理（Hilbert 零点定理） （29）式成立的充要条件是 $N(z,\omega)$、$D(z,\omega)$ 在复数域 C 内无公共零点.

引理只是 Hilbert 零点定理的一种特殊情形，证明参见文献〔8〕P506、508（注意 C 是代数闭域）.

多项式 $N(z,\omega)$、$D(z,\omega)$ 可看作是两条代数曲线在仿射坐标下的表示，现转向射影坐标表示. 记

$$N(z,\omega)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{i+j=k} b_{ij}z^i\omega^j,\quad D(z,\omega)=\sum_{k=0}^{M}\sum_{i+j=k} a_{ij}z^i\omega^j, \tag{30}$$

则有三元齐次多项式与它们对应：

$$N(x,z,\omega)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{i+j=N-k} b_{ij}z^i\omega^j x^k,$$
$$D(x,z,\omega)=\sum_{k=0}^{M}\sum_{i+j=M-k} a_{ij}z^i\omega^j x^k. \tag{31}$$

记 $A_k(z,\omega)=\sum\limits_{i+j=M-k} a_{ij}z^i\omega^j$，$B_k(z,\omega)=\sum\limits_{i+j=N-k} b_{ij}z^i\omega^j$，再把 $N(x,z,\omega)$，D

(x,z,ω) 关于 x 的结式记为：

$$R(z,\omega)=\det\begin{pmatrix} A_0(z,\omega) & A_1(z,\omega) & \cdots & A_M(z,\omega) & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & A_0(z,\omega) & A_1(z,\omega) & \cdots & A_M(z,\omega) \\ B_0(z,\omega) & B_1(z,\omega) & \cdots & B_N(z,\omega) & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & B_0(z,\omega) & B_1(z,\omega) & \cdots & B_N(z,\omega) \end{pmatrix}\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\ \ddots\\ A\end{array}}\right\} N\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}B\\ \ddots\\ B\end{array}}\right\} M\text{行}\end{array} \qquad (32)$$

令 $y=\omega/z$，则 $R(1,y)=0$ 是 y 的高次方程[9]，其全体复根（包括实根）记为 α_i，$1\leq i\leq MN$。

定理 4 二维系统 S（参见式(8)、(27)）强形式能达能观的充要条件是 $R(z,\omega)\neq 0$ 且对任一 $R(1,y)=0$ 的复根 α_i，$N(z,\alpha_i z)$ 与 $D(z,\alpha_i z)$ 在 C 上无公共零点。

证 由文献〔9〕P67，知 $R(z,\omega)=0$ 时 $N(z,\omega)$ 与 $D(z,\omega)$有公因子，再由引理与定义 3 可得条件的必要性。下面证充分性。用反证法：反设 $N(z,\omega)$，$D(z,\omega)$有公共零点，则由文献〔9〕P67 知，这时 $R(C_0,C_1)=0 \Longleftrightarrow$ 有如此的 C_2 值存在，使 $N(C_2,C_0,C_1)=D(C_2,\ C_0,\ C_1)=0$，这里 $C_i\in C$，$i=0,1,2$。现设：$N(z,\omega)$ 与 $D(z,\omega)$有公共零点 $(z,\omega)=\ (C_0'\ C_1')$，取$C_2'=1$，显然 $N(C_2',C_0',C_1')=D\ (\ C_2',C_0',C_1')=0$，所以$R(C_0',C_1')=0$，$C_1'/C_0'$是某个 α_i，对这个 α_i，$N(z,\alpha_i z)$与$D(z,\alpha_i z)$在 C 上有公共零点 C_0'，与假设矛盾，定理证毕。

从定理 4 看出强形式能达能观不但要求分子分母无一维流形（公因子）作为公共零点集，且要求无零维流形为公共零点集。

定理 5 当定理 4条件满足时。$G(z,\omega)$ 可以用补偿器 $C(z,\omega)=V^*(z,\omega)/W^*(z,\omega)$ 综合成闭环传递函数具有任意指定分母 $\Psi(z,\omega)$ 的二维系统；若 $N(z,\omega)$与$D(z,\omega)$ 有最大公因子 $\varphi(z,\omega)$；$G(z,\omega)$ 消去 $\varphi(z,\omega)$后满足定理 4 条件，且 $\varphi(z,\omega)$稳定，则 $G(z,\omega)$ 可以用$C(z,\omega)$ 综合成闭环稳定的系统。

证 把$G(z,\omega)$看作对象，熟知，加入串联补偿器$C(z,\omega)$ 后，闭环传递函数为

$$G_c(z,\omega)=N(z,\omega)\,V^*(z,\omega)/(V^*(z,\omega)\,D(z,\omega)+W^*(z,\omega)\,N(z,\omega)).$$

由假设知（29）式成立，于是存在$V^*(z,\omega)$，$W^*(z,\omega)\in R[z,\omega]$，使 $G_c(z,\omega)$ 的分母为 $\Psi(z,\omega)$。当 $N(z,\omega)$，$D(z,\omega)$有最大公因子 $\varphi(z,\omega)$时，记 $G(z,\omega)=N_1(z,\omega)\,\varphi(z,\omega)/D_1(z,\omega)\varphi(z,\omega)$，类似地由假设知存在$V^*(z,\omega)$，$W^*(z,\omega)\in R[z,\omega]$，使

$$G_c(z,\omega)=N_1(z,\omega)V^*(z,\omega)\,\varphi(z,\omega)/\Psi(z,\omega)\,\varphi(z,\omega),$$

这里 $\Psi(z,\omega)$为某指定的稳定多项式，其任意零点均满足稳定条件：$|z_0|<1,|\omega_0|<1$；另由假设，$\varphi(z,\omega)$ 稳定，故其零点亦满足以上稳定条件；而 $G_c(z,\omega)$ 的分母零点集是 $\Psi(z,\omega)$ 与 $\varphi(z,\omega)$ 的零点集的并，因此亦满足以上稳定条件，即 $G_c(z,\omega)$ 稳定，定理证毕。

注记 4 当 $N(z,\omega)$、$D(z,\omega)$ 含有零维流形为稳定的公共零点时，如何用补偿器

综合出稳定的系统？这是个尚未解决的问题．这相当于已知有限多个点(z,ω)在稳定域中$(|z|<1,\ |\omega|<1)$，要求找出$V^*(z,\omega)$，$W^*(z,\omega)\in R[z,\omega]$，使$R[z,\omega]$中的多项式$\Psi(z,\omega)=V^*(z,\omega)D(z,\omega)+W^*(z,\omega)N(z,\omega)$生成的理想$[\Psi(z,\omega)]$的一维代数流形（经过上述有限个点）仍在稳定域中．

例 2

$$S:\quad A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},\quad C=[C_1,C_2]=[1,1],$$

由（27）式，$G(z,\omega)=(z-\omega)/(z\omega-1)$，经计算易得：$R(z,\omega)=(z-\omega)^2$，$R(1,y)=0$的根为$y=1$，$N(z,z)$与$D(z,z)$有公共零点$z=\pm1$；故$N(z,\omega)$与$D(z,\omega)$有公共零点：$(z,\omega)=(1,1)$与$(-1,-1)$．所以$S$虽是形式能达能观的，但却不是强形式能达能观的．本例说明了这两个概念的区别．

例 3

$$S:\quad A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad C=[1,0],$$

由（27）式，$G(z,\omega)=\omega/(z\omega+1)$，按（33）式经计算易得：$R(z,\omega)=\omega^2$，$R(1,y)=0$的根为$y=0$，因$N(z,0)=0$，$D(z,0)=1$，故$N(z,\omega)$与$D(z,\omega)$无公共零点，所以$S$是强形式能达能观的，也是形式能达能观的．本例说明了这两个概念间的联系．

参考文献

〔1〕 Bose, N. K., Problems and progress in multidimensional systems theory, Proceedings of the IEEE, **65**, 6 (1977), 824—840.

〔2〕 Roesser, R. P., A discrete state-space model for linear image processing, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**20** (1975), 1—10.

〔3〕 Marf, M., Levy, B. C., Kung, S. Y., New results in 2-D systems theory, Part Ⅰ: 2-D polynomial matrices, factorization and coprimeness, Proceedings of the IEEE, **65**, 6, (1977), 861—872.

〔4〕 Kung, S. Y., Levy, B. C., Marf, M., Kailath, T., New results in 2-D systems theory, Part Ⅱ: 2-D state-space models-realization and notions of controllability, observability and minimality, Proceedings of the IEEE, **65**, 6 (1977), 945—960.

〔5〕 Desoer, C. A., Liu, R. W., Murray, J., Saeks, R., Feedback system design: the fractional representation approach to analysis and synthesis, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**25**, 3

(1980), 399—412.
〔6〕 Fuhrmann. P. A., Algebraic system theory, an analyst's point of view, J. Franklin Inst., 301, 6 (1976), 521—540.
〔7〕 Eising, R., Realization and stabilization of 2-D systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-23, 5 (1978), 793—799.
〔8〕 范德瓦尔登, B. L., 代数学Ⅱ, 科学出版社(1978).
〔9〕 瓦克, R. J., 代数曲线, 科学出版社(1958) 67.
〔10〕 贾柯勃逊, N., 抽象代数学, 卷 2, 线性代数, 科学出版社, (1960), 70.

REACHABILITY, OBSERVABILITY AND SYNTHESIS OF TWO DIMENSIONAL SYSTEMS

Chen Wende
(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

This paper introduces the concepts of reachability and observability over rings, and the strong modal reachability and observability for two dimensional systems. By the methods of module theory, ideal theory and algebraic geometry, simple criteria for these reachability and observability, and the sufficient conditions for stabilizing the system are obtained.