

参数和状态估计的两段互耦 自适应 Kalman 滤波算法

邓自立 郭一新

(黑龙江省应用数学研究所)

摘 要

本文推广和改进了用虚拟噪声补偿模型误差的自适应滤波技术, 虚拟噪声的时变均值和协方差用作者提出的时变噪声统计估值器估计, 实现了线性离散系统的参数和状态的改进的两段互耦自适应 Kalman 滤波算法。数值模拟例子和实际例子证明了该算法的有效性。

一 引 言

Kalman 滤波广泛应用于递推估计动态系统的状态和参数。对于带未知参数的线性离散系统, 当把未知参数作为增广状态时, 遇到非线性滤波问题。此时可用推广的 Kalman 滤波^[1]估计未知参数, 但由于推广的 Kalman 滤波是用线性化方法处理非线性滤波问题, 因而降低了精度, 且由于状态维数的增加使计算量很大, 不便于在微型机上实现。

为了克服这个缺点, 近年来一系列文献^[2-5]提出了参数和状态估计的两段耦合算法。其中文献[2,3]提出了用虚拟噪声补偿模型误差以防止滤波发散的两段耦合的自适应 Kalman 滤波算法。但文献[2,3]没有注意和强调这样一个基本事实: 即使原系统的噪声统计(均值和协方差)是常的, 虚拟噪声统计也是时变的。因而文献[2,3]用常的噪声统计的 Sage 和 Husa^[6]估值器估计虚拟噪声的时变噪声统计是不合理的。特别文献[2]没有注意到即使原系统的噪声均值为零, 在一般情况下虚拟噪声的均值也不等于零。因而假定其均值为零而只估计虚拟噪声的协方差是不合理的。文献[2]中的数值模拟例子表明其算法的精度是不理想的, 原因就在于此。

本文的推广和改进工作是原系统的噪声统计可以是常的或时变的, 且在两段 Kalman 滤波中, 虚拟噪声统计用作者提出的时变噪声统计估值器^[7]估计, 有效地防止了滤波的发散。数值模拟例子和应用实例证明了本文算法的有效性。

二、问题的提出和解决

考虑线性离散系统

$$\mathbf{x}(k+1) = A(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(k) + B(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\omega}(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (2)$$

其中 $k=0, 1, 2, \dots$, $\mathbf{x}(k)$ 是 $n \times 1$ 状态向量, $\mathbf{u}(k)$ 是 $p \times 1$ 已知的输入向量, $\mathbf{y}(k)$ 是 $m \times 1$ 观测向量, 模型噪声 $\boldsymbol{\omega}(k)$ 和观测噪声 $\mathbf{v}(k)$ 是相互独立的带未知时变均值和协方差的高斯白噪声:

$$E[\boldsymbol{\omega}(k)] = \boldsymbol{\mu}(k), \quad \text{cov}[\boldsymbol{\omega}(k), \boldsymbol{\omega}(i)] = \Omega(k)\delta_{ki},$$

$$E[\mathbf{v}(k)] = \mathbf{r}(k), \quad \text{cov}[\mathbf{v}(k), \mathbf{v}(i)] = R(k)\delta_{ki},$$

其中 E 为均值号, cov 为协方差号, δ_{ki} 为 Kronecker δ 函数. 矩阵 A 、 B 中所有未知元素的全体为列向量 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l]^T$, τ 为转置号, 记号 $A(\boldsymbol{\theta})$ 、 $B(\boldsymbol{\theta})$ 表示矩阵 A 、 B 的赋值由未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的赋值所决定. $H(k)$ 是已知的观测阵.

如果参数是常的, 则有动态模型

$$\boldsymbol{\theta}(k+1) = \boldsymbol{\theta}(k). \quad (3)$$

如果 $\boldsymbol{\theta}$ 是时变的, 则有一般的动态模型

$$\boldsymbol{\theta}(k+1) = F\boldsymbol{\theta}(k) + \boldsymbol{\xi}(k), \quad (4)$$

其中 F 是已知的常阵, 通常假定 $F=I$ (单位阵). $\boldsymbol{\xi}(k)$ 是带未知时变统计且独立于 $\boldsymbol{\omega}(k)$ 、 $\mathbf{v}(k)$ 的高斯白噪声:

$$E[\boldsymbol{\xi}(k)] = \mathbf{s}(k), \quad \text{cov}[\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\xi}(i)] = S(k)\delta_{ki}.$$

问题是基于到时刻 k 的观测 $\{\mathbf{y}(k), \mathbf{y}(k-1), \dots, \mathbf{y}(1)\}$ 求状态 $\mathbf{x}(k)$ 和未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}(k)$ 的线性最小方差估计. 为此, 本文提出了如下的改进的两段互耦自适应 Kalman 滤波算法.

第一段, 把 (1) 式代入观测模型 (2) 式有

$$\mathbf{y}(k) = H(k)A(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(k-1) + H(k)B(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(k-1) + H(k)\boldsymbol{\omega}(k-1) + \mathbf{v}(k), \quad (5a)$$

因观测阵 $H(k)$ 已知, 则 $m \times 1$ 向量 $H(k)A(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(k-1)$ 的每个分量是 $\boldsymbol{\theta}$ 的分量的线性函数, 但线性函数的系数与 $\mathbf{x}(k-1)$ 有关, 类似地 $m \times 1$ 向量 $H(k)B(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(k-1)$ 的每个分量也是 $\boldsymbol{\theta}$ 的分量的线性函数, 但其系数与 $\mathbf{u}(k-1)$ 有关. 把分量合成为向量形式可得

$$\mathbf{y}(k) = C[\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)]\boldsymbol{\theta} + \mathbf{d}[\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)] + H(k)\boldsymbol{\omega}(k-1) + \mathbf{v}(k), \quad (5b)$$

其中 矩阵 C 和向量 \mathbf{d} 的元素与 $\mathbf{x}(k-1)$ 、 $\mathbf{u}(k-1)$ 有关. 因为通常并不是 A 、 B 中的所有元素全未知, 因此 $\mathbf{d}[\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)]$ 表示不含 $\boldsymbol{\theta}$ 的分量的项.

在 (5b) 式中以滤波估值 $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ 近似代替 $\mathbf{x}(k-1)$ 可得关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的观测模型^[2,3,4]

$$\mathbf{y}(k) = C[\hat{\mathbf{x}}(k-1), \mathbf{u}(k-1)]\boldsymbol{\theta}(k) + \mathbf{d}[\hat{\mathbf{x}}(k-1), \mathbf{u}(k-1)] + \boldsymbol{\eta}(k), \quad (5c)$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}(k) = H(k)\boldsymbol{\omega}(k-1) + \mathbf{v}(k) + \text{模型误差补偿项},$$

这里模型误差补偿项是指用估值 $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ 近似代替 $\mathbf{x}(k-1)$ 所引入的观测模型误差, 我

们称 $\eta(k)$ 为虚拟噪声, 它把观测模型误差归入到虚拟噪声中去, 显然, 虚拟噪声带时变均值和协方差, 即使 $v(k)$ 和 $\omega(k-1)$ 的均值和协方差是常的, $\eta(k)$ 的均值和协方差也是时变的, 可设

$$E[\eta(k)] = n(k), \text{cov}[\eta(k), \eta(i)] = N(k)\delta_{ki}.$$

这种时变噪声统计可用作者^[7]提出的时变噪声统计估计器估计, 对系统(4)、(5c)而言, 估计 θ 的自适应 Kalman 滤波为^[7]

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k+1|k) + K_{\theta}(k+1)\epsilon_{\theta}(k+1), \quad (6)$$

$$\hat{\theta}(k+1|k) = F\hat{\theta}(k) + \hat{s}(k), \quad (7)$$

$$\epsilon_{\theta}(k+1) = y(k+1) - C(k)\hat{\theta}(k+1|k) - d(k) - \hat{n}(k), \quad (8)$$

$$P_{\theta}(k+1|k) = FP_{\theta}(k)F^T + \hat{S}(k), \quad (9)$$

$$K_{\theta}(k+1) = P_{\theta}(k+1|k)C^T(k)[C(k)P_{\theta}(k+1|k)C^T(k) + \hat{N}(k)]^{-1}, \quad (10)$$

$$P_{\theta}(k+1) = [I - K_{\theta}(k+1)C(k)]P_{\theta}(k+1|k), \quad (11)$$

其中 虚拟噪声的时变噪声统计估值器为^[7]

$$\hat{s}(k+1) = (1-b_h)\hat{s}(k) + b_h[\hat{\theta}(k+1) - F\hat{\theta}(k)], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}(k+1) &= (1-b_h)\hat{S}(k) + b_h[K_{\theta}(k+1)\epsilon_{\theta}(k+1)\epsilon_{\theta}^T(k+1)K_{\theta}^T(k+1) \\ &\quad + P_{\theta}(k+1) - FP_{\theta}(k)F^T], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\hat{n}(k+1) = (1-b_h)\hat{n}(k) + b_h[y(k+1) - C(k)\hat{\theta}(k+1|k) - d(k)], \quad (14)$$

$$\hat{N}(k+1) = (1-b_h)\hat{N}(k) + b_h[\epsilon_{\theta}(k+1)\epsilon_{\theta}^T(k+1) - C(k)P_{\theta}(k+1|k)C^T(k)], \quad (15)$$

其中 $b_h = (1-b)/(1-b^{h+1})$, $0 < b < 1$, b 叫遗忘因子.

$$C(k) = C[\hat{x}(k), u(k)], \quad d(k) = d[\hat{x}(k), u(k)].$$

在上述算法中 $\eta(k)$ 被近似看成白噪声.

第二段, 假定在(1)式中的 θ 用在第一段的滤波估值 $\hat{\theta}(k+1)$ 近似代替, 可得

$$x(k+1) = A(\hat{\theta}(k+1))x(k) + B(\hat{\theta}(k+1))u(k) + w(k), \quad (16)$$

其中

$$w(k) = \omega(k) + [A(\theta) - A(\hat{\theta}(k+1))]x(k) + [B(\theta) - B(\hat{\theta}(k+1))]u(k)$$

为虚拟噪声, 模型误差被合并到 $w(k)$ 中. 显然 $w(k)$ 带时变噪声统计, 可令

$$E[w(k)] = q(k), \text{cov}[w(k), w(i)] = Q(k)\delta_{ki}.$$

易知, 即使 $\omega(k)$ 的均值为零, 只要 $Ex(0) \neq 0$ 和/或 $u(k) \neq 0$, 则 $w(k)$ 也将具有非零时变均值和协方差. 近似视 $w(k)$ 为白噪声, 则对系统(16)、(2)式而言, 状态 $x(k)$ 的自适应 Kalman 滤波为^[7]

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K_x(k+1)\epsilon_x(k+1), \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = A(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1))\hat{\mathbf{x}}(k) + B(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1))\mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{q}}(k), \quad (18)$$

$$\mathbf{e}_x(k+1) = \mathbf{y}(k+1) - H(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) - \hat{\mathbf{r}}(k), \quad (19)$$

$$K_x(k+1) = P_x(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P_x(k+1|k)H^T(k+1) + \hat{R}(k)]^{-1}, \quad (20)$$

$$P_x(k+1|k) = A(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1))P_x(k)A^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1)) + \hat{Q}(k), \quad (21)$$

$$P_x(k+1) = [I - K_x(k+1)H(k+1)]P_x(k+1|k). \quad (22)$$

$\mathbf{v}(k)$ 和虚拟噪声 $\mathbf{w}(k)$ 的时变噪声统计估值器为^[7]

$$\hat{\mathbf{q}}(k+1) = (1 - \beta_k)\hat{\mathbf{q}}(k) + \beta_k[\hat{\mathbf{x}}(k+1) - A(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1))\hat{\mathbf{x}}(k) - B(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1))\mathbf{u}(k)], \quad (23)$$

$$\hat{Q}(k+1) = (1 - \beta_k)\hat{Q}(k) + \beta_k[K_x(k+1)\mathbf{e}_x(k+1)\mathbf{e}_x^T(k+1)K_x^T(k+1) + P_x(k+1) - A(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1))P_x(k)A^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1))], \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{r}}(k+1) = (1 - \beta_k)\hat{\mathbf{r}}(k) + \beta_k[\mathbf{y}(k+1) - H(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)], \quad (25)$$

$$\hat{R}(k+1) = (1 - \beta_k)\hat{R}(k) + \beta_k[\mathbf{e}_x(k+1)\mathbf{e}_x^T(k+1) - H(k+1)P_x(k+1|k)H^T(k+1)], \quad (26)$$

其中 $\beta_k = (1 - \alpha)/(1 - \alpha^{k+1})$, $0 < \alpha < 1$, α 为遗忘因子。适当选定 b , α 和初始条件后, 可交替进行上述两段, 得到状态和参数的次优线性最小方差估计。

三. 数值模拟例子

本节以数值模拟例子证明, 用作者提出的时变噪声统计估值器来估计虚拟噪声的时变均值和方差对补偿模型误差, 防止滤波发散, 改进滤波器性能是有很有效的。适当选取遗忘因子的值, 将会使自适应滤波非常接近于最优滤波。

为简单计, 考虑如下纯量系统:

$$x(k+1) = 0.9x(k) + \omega(k), \quad (27)$$

$$y(k) = x(k) + v(k), \quad (28)$$

其中 $\omega(k)$ 和 $v(k)$ 是独立高斯白噪声, 且设观测噪声 $v(k)$ 的均值和方差是已知的: $r = 0$, $R = 0.01$ 。

情形 (I) 设模型噪声 $\omega(k)$ 的均值和方差也已知: $\mu = 0.2$, $\Omega = 0.01$, 初值取为

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = x(0) = 1, P(0) = 0. \quad (29)$$

对系统 (27)、(28) 式可得最优滤波。

情形 (II) 相对于真实模型 (27) 而言, 设已知带误差的模型为

$$x(k+1) = 0.8x(k) + \omega(k), \quad (30)$$

而 $\omega(k)$ 的真实均值和方差 $\mu = 0.2$, $\Omega = 0.01$ 是未知的。对带模型误差系统 (30),

(28) 式, 取 $\mu = 0$, $\Omega = 0.05$, 且初值仍为 (29) 式, 可实行次优滤波。

情形 (III) 为了补偿模型误差, 引入带虚拟噪声 $w(k)$ 的系统

$$x(k+1) = 0.8x(k) + w(k), \quad (31)$$

其中 $w(k)$ 补偿了真实系统 (27) 式的模型误差 $0.1x(k)$, 因而由 (27) 式有

$$w(k) = \omega(k) + 0.1x(k). \quad (32)$$

显然虚拟噪声 $w(k)$ 带非零时变均值和方差, 且可近似认为是白噪声。对于带虚拟噪声系统 (31)、(28) 式, 取 $w(k)$ 的均值和方差的初始估值为 $\hat{q}(0) = 0$, $\hat{Q}(0) = 0.005$ 及初值 (29) 式, 取遗忘因子 $\alpha = 0.9$, 利用算法 (17) — (26) 式可得自适应 Kalman 滤波。

上述三种情形的 Kalman 滤波在 Z-80 机上模拟结果如下图所示。可看到本文的自适应滤波非常接近于系统的最优滤波, 而带模型误差系统的次优滤波则有很大的状态估计误差。这表明本文算法可有效地补偿模型误差。



最优滤波、次优滤波和自适应滤波的比较

(注: 图中 $\hat{x}(k|k)$ 应为 $\hat{x}(k)$)

四、应用于油田产水量动态预报

文献[7]给出了油田产油量、产水量动态预报的两种自适应 Kalman 滤波方法。这里则应用本文提出的两段互耦自适应 Kalman 滤波算法解决油田产水量动态预报问题。

设所观测的产水量时间序列 $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 是以月份为时间单位记录的。由于各种随机因素的影响, 产水量按月的递增率 $a(k)$ 是时变的和随机的。设真实产水量时间序列为 $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 并且对 $x(k)$ 的观测值 $y(k)$ 带有观测误差 $v(k)$, 因而产水量的动态系统可描写为

$$x(k+1) = a(k+1)x(k) + \omega(k), \quad (33)$$

$$y(k) = x(k) + v(k), \quad (34)$$

其中 $\omega(k)$ 为模型噪声, $v(k)$ 为观测噪声, 它们是相互独立的高斯白噪声, $a(k)$ 可解释为产水量按月的随机递增系数, 可设它服从随机游动模型

$$a(k+1) = a(k) + \xi(k), \quad (35)$$

其中白噪声 $\xi(k)$ 独立于 $\omega(k)$ 、 $v(k)$ 。

应用本文的两段互耦自适应 Kalman 滤波算法, 实现了对产水量递增系数 $a(k)$ 和产水量 $x(k)$ 的多步递推预报。由 (34) 式看出^[7], 可用对 $y(k)$ 的预报精度度量对 $x(k)$ 的预报精度。在 Z-80 机上计算结果表明: 对 $y(k)$ 的多步预报 (超前 24 步, 即超前两年) 的相对误差平均在 2% 以内。这种预报精度是令人满意的。

五、结 论

1. 本文指出了现行的用虚拟噪声补偿模型误差的自适应滤波技术的缺点和局限性:

(1) 用 Sage 和 Husa 的常的噪声统计估值器^[6]估计虚拟噪声的时变噪声统计是不合理的^[2,3]。

(2) 一般地说, 假定虚拟噪声的均值为零是不正确的^[2]。只有在特殊情况下, 例如 $Ex(0) = 0$, $u(k) \equiv 0$, 等等, 虚拟噪声的均值才为零。

(3) Yochimura 和 Soeda^[8]提出的时变噪声统计估值器仅适用于估计状态模型的虚拟噪声, 而没有给出估计观测模型的虚拟噪声统计的时变噪声统计估值器。

2. 建议用本文作者提出的时变噪声统计估值器^[7]估计状态模型和/或观测模型的虚拟噪声统计。本文算法比文献[8]的算法简单适用和更带一般性, 可有效地防止滤波发散。

3. 数值模拟例子和油田产水量动态预报的实例证明了本文提出的两段互耦自适应 Kalman 滤波算法的有效性。

参 考 文 献

- [1] 中国科学院数学研究所概率组, 离散时间系统滤波的数学方法, 国防工业出版社 (1975)。
- [2] Prasad, R. M., A. K. Sinha, A. K. Mahalanabis, Two-Stage Bootstrap Algorithms for Parameter Estimation, Int. J. Syst. Sci., 18, 12 (1977)。
- [3] Todini, E., Mutually Interactive State/Parameter (MISP) Estimation in Hydrological Applications, Modeling, Identification and Control in Environmental Systems, Vansteenkiste, ed., IFIP, North-Holland Pub. Company (1978)。
- [4] Prasad, R. M., Sinha, A. K., On Bootstrap Identification Using

- Stochastic Approximation, IEEE Trans. Autom. Contr., AC-22, 4 (1977), 671—672.
- [5] Sherief, H. EL. Sinha, N. K., Bootstrap Estimation of Parameters and States of Linear Multivariable Systems, IEEE Trans., AC-24, 2 (1979), 341—343.
- [6] Sage, A. P., Husa, G. W., Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics, 1969 Joint Automatic Control Conference, 760—769.
- [7] 邓自立、郭一新, 油田产油量、产水量动态预报, 自动化学报, 9, 2 (1983), 121—126.
- [8] Yoshimura, T., Soeda, T., A Technique for Compensating the Filter Performance by a Fictitious Noise, Trans. ASME, Ser. G, J. of Dynamic Syst. Measurement and Control, 100, 2 (1978).

TWO-STAGE COUPLED ADAPTIVE KALMAN FILTERING ALGORITHMS FOR PARAMETER AND STATE ESTIMATION

Deng Zili, Guo Yixin

(Heilongjiang Institute of Applied Mathematics, Haerbin)

Abstract

An adaptive filtering technique in which the model errors are compensated by fictitious noise is extended and modified in this paper. The mean and variance of fictitious noise are estimated by using the time-varying noise statistics estimators proposed by the authors. Further more, two-stage coupled modified adaptive Kalman filtering algorithms for parameter and state estimation are performed. Applicability of algorithms is illustrated by numerical simulation example and practical example.