第2卷第2期 控制理论与应用 Vol.2, No.2
1985年4月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS April, 1985

时延系统的鲁棒调节器

方崇智 钱唯德 张金水

（清华大学）

摘　　要

本文把线性定常系统看作一组解函数组成的有限维线性空间上的线性变换，从一般角度讨论了线性定常系统鲁棒调节器设计原理，把鲁棒调节器基本结论推广到更广泛的一类延迟系统。

一、前　　言

在工程上及经济管理等领域，具有时延的线性定常（以下简记LTI）系统例子很多。如化工生产中的反应器、锅炉；工厂中的生产流水线等都是这类系统。文〔1〕把鲁棒调节器基本结论推广到具有状态延迟且只有一种延迟元件的一类LTI系统中去。文〔2〕提供了设计随动系统鲁棒调节器的线性变换方法。本文采用这种方法简明地讨论了具有状态延迟、控制延迟，延迟方式可以是集中延迟和分布延迟；且具有多种延迟时间的更广泛的一类LTI系统鲁棒调节器的设计方法。本文所用符号同文〔2〕。

二、视作有限维线性解函数空间上变换的线性定常系统

下面考察一般的线性时不变系统。

给定任一正实数 c。Ec 表示函数集合。集合中函数 $V(t)$ 是定义在〔0,∞）上勒贝格可积函数。且当 $t>t_0\geq 0$ 时，$|V(t)|\leq he^{-ct}$；h，t_0 是实数。

定义 1　称系统为关于 c 指数稳定的，如果在任一初始条件下，当 $u(t)=0$ 时，系统所有内部状态函数都取自 Ec。

引理 1　考察单输入单输出指数稳定LTI系统，若输入 $u(t)=t^q e^{\lambda t}h(t)/q!$，则稳态时（$t\to\infty$），输出 $y(t)=l^1\,t^q e^{\lambda t}h(t)/q!+l^2\,t^{q-1}e^{\lambda t}h(t)/(q-1)!+\cdots+l^{q+1}e^{\lambda t}h(t)$，

其中 $h(t)$ 是单位阶跃函数，λ 是复常数，$\mathrm{Re}\,\lambda\geq 0$。

$$l^1=W(s)|_{s=\lambda},$$

$$l^\theta=\frac{1}{(\theta-1)!}\cdot\frac{d^{\theta-1}}{ds^{\theta-1}}W(s)\Big|_{s=\lambda},\quad \theta=1,\ 2,\ \cdots,\ q+1,$$

本文于1983年3月2日收到。1984年7月4日收到修改稿。

$W(s)$ 是系统传递函数。

定理 1 设多输入多输出指数稳定 LTI 系统，它的输入 $u(t)\in K[\xi]_{mp}$，则当 $t\to\infty$ 时，该系统可看作 $K[\xi]_{mp}\to K[\eta]_{rp}$ 的线性变换 T，且有如下关系式：

$$y=\left(\eta_{11}^{1}\eta_{11}^{2}\cdots\eta_{11}^{r}\cdots\eta_{\bar{p}q_{\bar{p}}}^{1}\eta_{\bar{p}q_{\bar{p}}}^{2}\cdots\eta_{\bar{p}q_{\bar{p}}}^{r}\right)\begin{bmatrix}T_1 & & 0\\ & T_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_{\bar{p}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}^{1}\\ \vdots\\ u_{11}^{m}\\ \vdots\\ u_{\bar{p}q_{\bar{p}}}^{1}\\ \vdots\\ u_{\bar{p}q_{\bar{p}}}^{m}\end{bmatrix},$$

其中

$$T_k=\begin{bmatrix}L_k^1 & L_k^2 & \cdots & L_k^{q_k}\\ & L_k^1 & \cdots & L_k^{q_k-1}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & L_k^1\end{bmatrix}_{rq_k\times mq_k}$$

$$L_k^1=W(s)\Big|_{s=\lambda_k},$$

$$L_k^\theta=\frac{1}{(\theta-1)!}\cdot\frac{d^{\theta-1}}{ds^{\theta-1}}W(s)\Big|_{s=\lambda_k}\quad 为\ r\times m 阵。$$

证 引理1可由线性定常系统基本定义直接推得；定理1在单输入单输出情况下，可由引理1直接推得；在多输入输出情况，由于系统具有迭加性，可从单输入输单输出的情况推广。证明过程参见文[2]。

三、鲁棒调节器

考察如下微分差分方程描述的延迟系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(\mathring{A}*x)(t)+(\mathring{B}*u)(t)+(\mathring{E}*w)(t), & (1)\\ y(t)=(\mathring{C}*x)(t)+(\mathring{D}*u)(t)+(\mathring{F}*w)(t), & (2)\\ e(t)=y(t)-y_r(t). & (3)\end{cases}$$

—系统状态，u—系统控制输入，y—系统被调输出变量，w—系统扰动输入，y_r—统参考输入，e—偏差。

$\overset{\circ}{A}\in N^{n\times n}$, $\overset{\circ}{B}\in N^{n\times m}$, $\overset{\circ}{E}\in N^{n\times f}$, $\overset{\circ}{C}\in N^{r\times n}$, $\overset{\circ}{D}\in N^{r\times m}$, $\overset{\circ}{F}\in N^{r\times f}$.

N 是算子环，它又是算子环 J 的子环，$*$ 是卷积运算。

算子环 J 是如下形式的元的集合：

$$\alpha+\sum_{i=0}^{q}a_i\delta_{b_i}$$，这里 $\alpha\in L_0^{\mathrm{loc}}$，$L_0^{\mathrm{loc}}$ 指定义在区间 $[0, a^*]$ 上的一切勒贝格可积函数。$0<a^*<\infty$，a_i，$b_i\in R$，当 $i\neq 0$ 时，$b_i>0$，$b_0=0$，$q\in\{1,2,\cdots\}$。

δ_{b_i} 是脉冲函数，通常写作 $\delta(t-b_i)$，它又叫 Dirac（狄拉克）分布。

当 $N=R\delta_0=\{a\delta_0: a\in R\}$ 时，方程（1）～（3）便是通常的常微分方程组。

当 $N=R[\delta_0, \delta_b]$ 时，方程（1）～（3）便成为包含一种延迟元件的延迟系统，即文[1]所考虑的情况。

当 $N=R[\delta_0, \delta_{b_1}, \cdots, \delta_{b_q}]$ 时，方程（1）～（3）便成为包含多种延迟元件的延迟系统。

当 $N=J$ 时，它比上述环多了一种元 α，即定义在区间 $[0, a^*]$ 上勒贝格可积函数，α 与函数的卷积意味着系统含有分布延迟。

干扰向量 w 及参考输入 y_r 同文[2]，都是由 $K[f]_p$ 中函数线性组合而成。

给定算子环 N 中矩阵 $\overset{\circ}{M}$，$\lambda\in K$，令 $\overset{\circ}{M}(\lambda)$ 表示 $\overset{\circ}{M}$ 中诸元 $\overset{\circ}{m}_{ij}$ 的微分算符 S 用复数 λ 代替，如 $\delta_{b_i}=e^{-b_i s}$ 用 $e^{-b_i\lambda}$ 代替。$\alpha(s)$ 是 α 的拉氏变换，用 $\alpha(\lambda)$ 代替。

不失一般性，设（1）～（3）中：$\operatorname{rank}\overset{\circ}{C}(\lambda_i)=r$，$\operatorname{rank}\overset{\circ}{B}(\lambda_i)=m$，$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\overset{\circ}{E}(\lambda_i)\\ \overset{\circ}{F}(\lambda_i)\end{bmatrix}=f$；$\lambda_i\in(\lambda_1, \cdots, \lambda_{\bar{p}})$。方程（1）～（3）描述的系统，在零初始条件下，不难知道是线性时不变系统。

给定实数集合 $G=\{g_i\}$，若 $g_i\in\overset{\circ}{\Omega}_\varepsilon$，这里 $\overset{\circ}{\Omega}_\varepsilon=\{g_i\,|\,|g_i|<\varepsilon\}$，则记 $G\in\overset{\circ}{\Omega}_\varepsilon$。

定义 2 设系统所有允许发生变化的非空参数集合是 $\mathbf{D}$，已知系统是指数稳定的，如果存在 $\varepsilon>0$，当系统参数发生变化：$\mathbf{D}\to\mathbf{D}+\delta\mathbf{D}$，$\delta\mathbf{D}\in\overset{\circ}{\Omega}_\varepsilon$，若系统仍然指数稳定，则称该系统为关于 $\mathbf{D}$ 是强指数稳定系统。

定义 3 已知系统（1）～（3），若存在调节器，使得当受控对象参数发生扰动时：$\mathbf{D}\to\mathbf{D}+\delta\mathbf{D}$，如果存在 $\varepsilon>0$，只要 $\mathbf{D}$ 各元扰动在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 之内，即 $\forall\delta\mathbf{D}\in\overset{\circ}{\Omega}_\varepsilon$ 时，闭环系统指数稳定就一定发生渐近调节：$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$，那么就称该调节器是一个鲁棒调节器。

对于系统（1）～（3），现按下列方式构造调节器：

$$u(t)=(\overset{\circ}{K}_x*x)(t)+(\overset{\circ}{K}_\eta*\eta)(t), \tag{4}$$

$\overset{\circ}{K}_x$，$\overset{\circ}{K}_\eta$ 的元取值于环 J。

这里 $r\times p$ 维向量 η 是由下式定义的伺服补偿器的状态：

$$\begin{cases} \dot{\eta} = Q^{*-1}\text{block diag}(G,\ G,\ \cdots,\ G)Q^*\eta + Q^{*-1}\beta^* e, \\ e = y - y_r, \end{cases} \tag{5}$$

其中 G 的定义同文〔2〕，Q^* 是任一非异阵，β^* 是任意 $rp\times r$ 阵，满足：

$\{\text{block diag}(G,\ G,\ \cdots,\ G),\ \beta^*\}$

可控。

其构造框图如图 1。

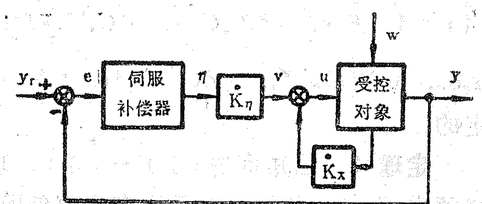

图 1

定理 2　已知系统（1）～（3），按（4）、（5）式构造调节器如图1。若存在 $\mathring{K}_\eta$、$\mathring{K}_x$ 使闭环系统指数稳定，且关于系统所有允许发生变化的参数集 **D** 是强指数稳定的，则便构成鲁棒调节系统，（4）、（5）式便是系统的鲁棒调节器。

证　适当选择 $\mathring{K}_x$、$\mathring{K}_\eta$ 使闭环系统指数稳定。

因为 y_r 和 w 分别是取值于 $K[f]_p$ 的 r 维和 f 维矢量。依定理1，稳定时伺服补偿器的状态 η 和输入 e 也是取值于 $K[f]_p$ 的 rp 维和 r 维矢量。

现反设稳态时 $e\neq 0$，依文〔2〕引理3，伺服补偿器的状态函数中，必有不属于 $K[f]_p$ 的非零函数存在，这与定理1矛盾。

因此稳态时只能 $e=0$。

现在让受控对象参数发生扰动：$\mathbf{D}\to\mathbf{D}+\delta\mathbf{D}$；由于系统是强指数稳定的，因此存在 $\varepsilon>0$，当 **D** 各元扰动在 $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ 之内，即 $\forall\delta\mathbf{D}\in\mathring{\Omega}_\varepsilon$ 时，闭环系统仍指数稳定，依以上证明，仍能渐近调节而具有鲁棒性。综上所述，由（4）、（5）式构造的调节器是该系统鲁棒调节器。　证毕。

关于定理 2 说明几点。

首先，这里的方法实际上讨论了一般 LTI 系统鲁棒调节器的构造方法。

其次，图 1 中状态反馈可采用状态观测器。对时间延迟系统如何采用状态观测器超出了本文讨论的范围。

另外，这里没有说明参数集 **D** 具体是什么元时，系统是强指数稳定的。

给定矩阵 $M^*=\{m_{ij}\delta_0\}$，$m_{ij}\in R$，若 $m_{ij}\in\Omega_\varepsilon$，这里 $\Omega_\varepsilon=\{m_{ij}\,|\,|m_{ij}|<\varepsilon\}$，则记 $M^*\in\Omega_\varepsilon\delta_0$。

我们说系统参数发生扰动：$\mathring{A}\to\mathring{A}+\delta\mathring{A}$，$\delta\mathring{A}\in\Omega_\varepsilon\delta_0$ 是指 $\mathring{A}$ 中元：$\alpha+\sum\limits_{i=0}^{q}a_i\delta_{b_i}$，其中 $a_0\delta_0$ 形式的元发生扰动，a_0 扰动范围在 $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ 之内。

引理 2　考察图1系统，记 $v\to y$ 传递函数阵是 $W^\wedge(s)$。假定对于某个 λ_i，$i=1,2,\cdots,\bar{p}$；$W^\wedge(s)\big|_{s=\lambda_i}$ 不存在（即某些元为∞），则对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，$\mathring{A}\to\mathring{A}+\delta\mathring{A}$，$\forall\delta\mathring{A}\in\Omega_\varepsilon\delta_0$，$\exists(\mathring{A}+\delta\mathring{A})$ 使 $v\to y$ 的传递函数阵：$W^\wedge(s)\big|_{s=\lambda_i}$，$i=1,2,\cdots,\bar{p}$；

存在

下面两个定理考察系统(1)～(3)，按图1构造鲁棒调节器。系统参数允许变化：$\overset{\circ}{A}\to\overset{\circ}{A}+\delta\overset{\circ}{A}$，$\overset{\circ}{B}\to\overset{\circ}{B}+\delta\overset{\circ}{B}$，$\overset{\circ}{C}\to\overset{\circ}{C}+\delta\overset{\circ}{C}$，$\overset{\circ}{E}\to\overset{\circ}{E}+\delta\overset{\circ}{E}$，$\overset{\circ}{F}\to\overset{\circ}{F}+\delta\overset{\circ}{F}$，$\varepsilon$ 是任意正数，保证 $\forall\delta\overset{\circ}{A}\in\Omega_\varepsilon\delta_0$，$\forall\delta\overset{\circ}{B}\in\Omega_\varepsilon\delta_0$，$\forall\delta\overset{\circ}{C}\in\Omega_\varepsilon\delta_0$，$\forall\delta\overset{\circ}{E}\in\Omega_\varepsilon\delta_0$，$\forall\delta\overset{\circ}{F}\in\Omega_\varepsilon\delta_0$ 时，闭环系统是强指数稳定的。

定理 3　已知系统（1）～（3），现按图1构造鲁棒调节器，则 rp 阶伺服补偿器必须依式（5）构造，并且不存在更低阶伺服补偿器。

证　为简单起见，不妨设式（5）中 $Q^*=I$，$\beta^*=\text{block diag}(\beta,\beta,\cdots,\beta)$。

现设伺服补偿器结构如下：

$\dot{\eta}=\text{block diag}(G_1,G_2,\cdots,G_r)\cdot\eta+\text{block diag}(\beta,\beta,\cdots,\beta)e$，反设其中 G_i 的极点重数少于 G，而系统达到渐近调节时，$e=0$，这时可以认为伺服补偿器的状态是 $K[\eta]_{rp}$ 上的矢量，记为：

$$Z=\left(\eta_{11}^{1}\ \eta_{11}^{2}\cdots\eta_{11}^{r}\cdots\eta_{\overline{pq_p}}^{1}\cdots\eta_{\overline{pq_p}}^{r}\right)\begin{pmatrix}\eta_{11}^{1}(0)\\ \vdots\\ \eta_{\overline{pq_p}}^{r}(0)\end{pmatrix},$$

其中　rp 个数 $\eta_{11}^{1}(0)$，…，$\eta_{\overline{pq_p}}^{r}(0)$ 是伺服补偿器初值。由于 G_i 极点重数少于 G，因此，此 rp 个数中只有 $\tau<rq$ 个是任意常数，其余为0。

Z 经线性组合 K_η 后得到 v，依定理2，v 稳态时是 $K[\xi]_{mp}$ 中矢量，记为：

$$v=\left(\xi_{11}^{1}\ \xi_{11}^{2}\cdots\xi_{11}^{m}\cdots\xi_{\overline{pq_p}}^{1}\ \xi_{\overline{pq_p}}^{2}\cdots\xi_{\overline{pq_p}}^{m}\right)\begin{pmatrix}v_{11}^{1}\\ \vdots\\ v_{\overline{pq_p}}^{m}\end{pmatrix},$$

此 mp 个数 $v_{11}^{1}\cdots v_{\overline{pq_p}}^{m}$ 中，只能有 τ 个任意常数，其余是其线性组合。

由图1，依引理2，对任意给定正数 $\varepsilon>0$，$\forall\delta\overset{\circ}{A}\in\Omega_\varepsilon\delta_0$，$\exists(\overset{\circ}{A}+\delta\overset{\circ}{A})$ 使 $v\to y$ 中 $L_i^{\wedge 1}=W^{\wedge}(\lambda_i)$ 存在。由于闭环系统是指数稳定的，稳态时 v、y 皆是取值于 $K[f]_p$ 的 m 维、r 维矢量。设 $V\to Y$ 变换阵是 $T_V^{\wedge}$：

$$T_V^{\wedge}\cdot v=\left(\eta_{11}^{1}\cdots\eta_{11}^{r}\cdots\eta_{\overline{pq_p}}^{r}\right)\begin{pmatrix}T_1^{\wedge} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & T_{\bar p}^{\wedge}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{11}^{1}\\ \vdots\\ v_{\overline{pq_p}}^{m}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\eta_{11}^{1}\cdots\eta_{pq_{\bar{p}}}^{r}\right)\begin{pmatrix} y_{11}^{1} \\ \vdots \\ y_{11}^{r} \\ \vdots \\ y_{pq_{\bar{p}}}^{r} \end{pmatrix}.$$

由于系统参数变化，只是引起 $T_{\hat{1}}, \cdots, T_{\hat{\bar{p}}}$ 变化，$T_{\hat{i}}$ 总是分块对角阵，故可单独考察其中一块：

$$T_{\hat{i}}\begin{pmatrix} v_{iq_i}^{1} \\ \vdots \\ v_{iq_i}^{m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_{i}^{\hat{}1} & \cdots & L_{i}^{\hat{}q_i} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & L_{i}^{\hat{}1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{i1}^{1} \\ \vdots \\ v_{i1}^{m} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ v_{iq_i}^{1} \\ \vdots \\ v_{iq_i}^{m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{i1}^{1} \\ \vdots \\ y_{j1}^{r} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ y_{iq_i}^{1} \\ \vdots \\ y_{iq_i}^{m} \end{pmatrix}.$$

又参数变化，$T_{\hat{i}}$ 总是上三角阵，看右下角乘进去，得：

$$L_{i}^{\hat{}1}\begin{pmatrix} v_{iq_i}^{1} \\ \vdots \\ v_{iq_i}^{m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{iq_i}^{1} \\ \vdots \\ y_{iq_i}^{r} \end{pmatrix}=y^{*}. \qquad (6)$$

考察方程（6）。

首先，由于 mp 个数 $v_{11}^{1}\cdots v_{pq_{\bar{p}}}^{m}$ 中只有 $\tau<rp$ 个是任意常数，因此不妨设 $v_{iq_i}^{1}\cdots v_{iq_i}^{m}$ 中只有 $\tau^{*}<r$ 个是任意常数。那么总可以找到 $m\times m$ 满秩初等变换阵 T_b 使下式成立：

$$T_b\begin{pmatrix} v_{iq_i}^{1} \\ \vdots \\ v_{iq_i}^{m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{\tau^*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$b_1\cdots b_{\tau^*}$ 是任意常数。

其次，当系统参数变化时，$L_{i}^{\hat{}1}$ 各元皆可变，因为 $v\to y$：

$$L_i^{\triangle 1} = \mathring{D}(\lambda_i) + [\mathring{C}(\lambda_i) + \mathring{D}(\lambda_i)\mathring{K}(\lambda_i)][\lambda_i I - \tilde{\mathring{A}}(\lambda_i) - \mathring{B}(\lambda_i)\mathring{K}(\lambda_i)]^{-1}\mathring{B}(\lambda_i).$$

只要令$\mathring{C} \to \mathring{C} + \delta\mathring{C}$，$\delta L_i^{\triangle 1}$足够小，使：

$\delta\mathring{C}(\lambda_i)\delta_0 = \delta L_i^{\triangle 1}\delta_0 \cdot H \in \Omega_\varepsilon\,\delta_0$成立即可，（8

式中 $H \cdot [\lambda_i I - \tilde{\mathring{A}}(\lambda_i) - \mathring{B}(\lambda_i)\mathring{K}(\lambda_i)]^{-1}\mathring{B}(\lambda_i) = \mathrm{Im}$。

由于$\mathrm{rank}\,\mathring{B}(\lambda_i) = m$，故存在$H$阵使$\delta\mathring{C} \in \Omega_\varepsilon\,\delta_0$时，$L_i^{\triangle 1}$各元皆可变。

再其次，y^*是非0矢量。

现在令：

$$\delta L_i^{\triangle 1} T_b^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \varepsilon_0^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_0^* \end{matrix} & 0 \\ \hline T_\varepsilon & 0 \end{array}\right], \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_0^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_0^* \end{bmatrix} \text{是 } \tau^* \times \tau^* \text{阵。}$$

记：

$$L_i^{\triangle 1} T_b^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} T^1_{\tau^* \times \tau^*} & * \\ \hline T^2_{(\gamma - \tau^*) \times \tau^*} & * \end{array}\right].$$

则当系统参数变化后，方程（6）变为：

$$(L_i^{\triangle 1} + \delta L_i^{\triangle 1})T_b^{-1}T_b \begin{bmatrix} v^1_{iq_i} \\ \vdots \\ v^m_{iq_i} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} T^1_{\tau^* \times \tau^*} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_0^* \end{bmatrix} & * \\ \hline T^2_{(\gamma - \tau^*) \times \tau^*} + T_\varepsilon & * \end{array}\right] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{\tau^*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由此得方程：

$$\left\{ T^1_{\tau^* \times \tau^*} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_0^* \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{\tau^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1_{iq_i} \\ \vdots \\ y^{\tau^*}_{iq_i} \end{bmatrix}, \quad (9$$

$$\left\{T^2_{(r-\tau^*)\times\tau^*}+T_\varepsilon\right\}\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_{\tau^*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y^{\tau^*+1}_{iq_i}\\ \vdots\\ y^{r}_{iq_i}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

总可以选择 ε_0^*，T_ε 使（8）式成立，且 ε_0^* 不是 $T^1_{\tau^*\times\tau^*}$ 的极点。这样：

$$\left\{T^1_{\tau^*\times\tau^*}+\begin{pmatrix}\varepsilon_0^* & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_0^*\end{pmatrix}\right\}$$

满秩。（9）式有唯一解 $[b_1\cdots b_{\tau*}]^\tau$，代入（10）未必成立，若正好成立，只须适当改变 T_ε 即可使（10）不成立。

因此 $v^1_{iq_i}\cdots v^m_{iq_i}$ 中，必须有 r 个任意常数。这说明 $G_1\cdots G_r$ 中 λ_i 极点必须 q_i 重。否则系统参数变化 $\in\Omega_\varepsilon\delta_0$ 时，无法渐近调节。

再分别考察 $T^{\triangle}_1\cdots T^{\triangle}_{\bar p}$，同样要求 G_1，…，G_r 每个极点必须是 $\lambda_1\cdots\lambda_{\bar p}$，重数是 $q_1\cdots q_{\bar p}$，因此 G_1，G_2，…，G_r 极点分别同 G。 证毕。

定理 4 已知系统（1）～（3），此系统按图1接法下存在鲁棒调节器必要条件是：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathring{A}(\lambda_i)-\lambda_i I, & \mathring{B}(\lambda_i)\\ \mathring{C}(\lambda_i), & \mathring{D}(\lambda_i)\end{bmatrix}=n+r,\quad \begin{matrix}i=1,\ \cdots,\ \bar p\\ \lambda_i\in(\lambda_i\cdots\lambda_{\bar p})\end{matrix}$$

证 完全类似文〔2〕定理5相应部份可得：

$$\operatorname{rank}L_i^{\triangle 1}=r,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ \bar p.$$

这即要求定理所述条件成立，因为：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathring{A}(_i)-\lambda_i I, & \mathring{B}(\lambda_i)\\ \mathring{C}(\lambda_i), & \mathring{D}(\lambda_i)\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}I_n, & [\lambda_i I-\mathring{A}(\lambda_i)-\mathring{B}(\lambda_i)\mathring{K}(\lambda_i)]^{-1}\mathring{B}(\lambda_i)\\ 0, & L_i^{\triangle 1}\end{bmatrix}$$

$$=n+\operatorname{rank}L_i^{\triangle 1}=n+r.$$ 证毕。

四、例 子

例 1 图2是生产、销售、库存鲁棒调节系统。控制输入 $u(t)$ 是投产率。销售率 $F(t)$ 看作扰动。那么销售量 $H(t)$ 是斜坡干扰（$F(t)$ 为常值扰动）。控制目的是维持库存量 $T(t)$ 在某给定水平上（为常值）。那么伺服补偿器由二个积分器组成。产出量 $x(t)$

到销售点之间有延迟 h 时间，它可以是运输延迟等。

设计好的系统用 FORTRAN 语言在 BCM—Ⅲ微型机上进行仿真实验，实验结果如图 3 所示：每间隔 h 个单位时间打出曲线上一点。（步长 $0.05h$，函数积分采用梯形法。）

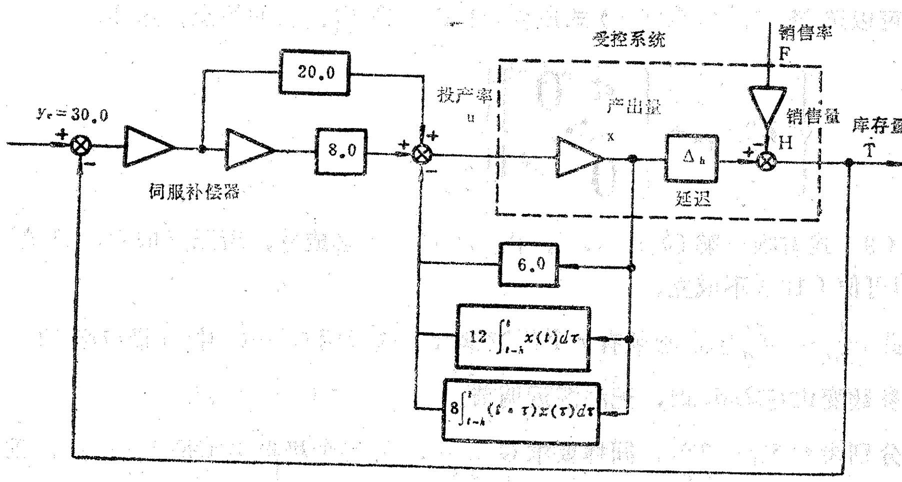

图 2

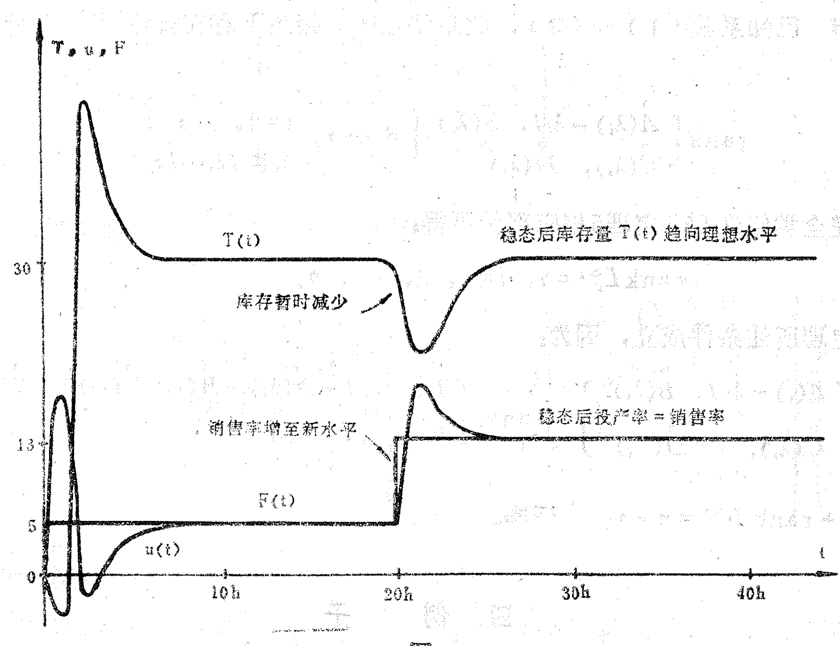

图 3

例 2　图 4 是工程上典型的二个惯性环节和一个延迟环节串联。设扰动 T、T_1、T_2 是常值干扰．控制目的是维持输出 H 恒定．则伺服补偿器由一个积分器构成．我们采

用状态观测器。整个系统进行极点配置。设计好的参数如图4所示。

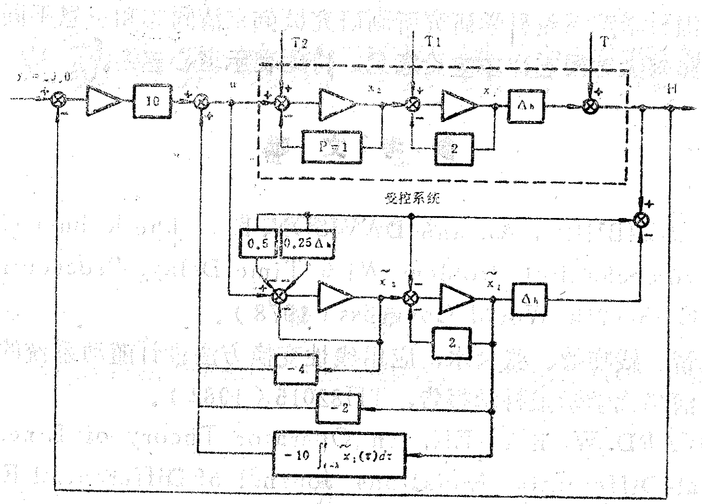

图 4

延迟环节的延迟时间为 h 个单位。上述系统用 FORTRAN 语言在 BCM—Ⅲ型微型机上进行仿真实验。步长为 $0.025h$。每过 h 个单位时间打印出一点。干扰 T、T_1、T_2 及输出 $H(t)$ 之仿真结果如图5所示。

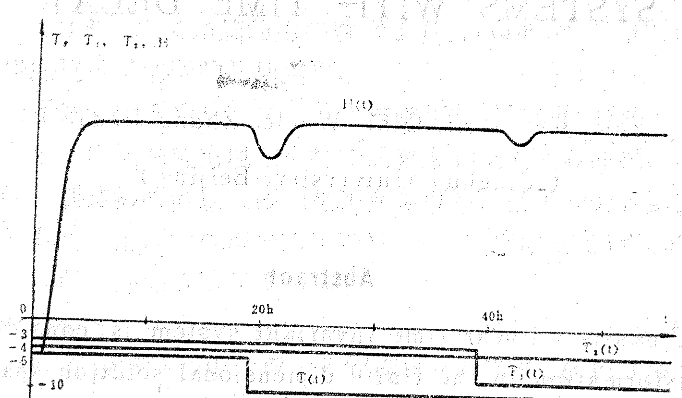

图 5

当 $t=20h$ 时，干扰 $T(t)$ 从 -5 突变至 -10，当 $t=40h$ 时，干扰 $T_1(t)$ 从 -3 突变至 -8 并且受控系统内部参数 $p=1.0$ 变为 $p=1.1$，从仿真结果可知，输出 $H(t)$ 都能渐近调节而具有鲁棒性。

五、结 束 语

本文主要结果是采用线性变换方法把鲁棒调节器构造方法推广到一般的线性时不变系统中去。但对系统如何设计状态观测器及如何进行极点配置可查阅有关文献。这些问

题的讨论超出本文范围。

本文得到中国科学院系统科学研究所副研究员韩京清同志和王恩平同志及清华大学副教授吴麒同志和郑大钟同志许多宝贵意见，特此表示衷心感谢。

参 考 文 献

〔1〕 GOLDENBERG, A., and DAVISON, E. J. The Robust Control of a Sevomechanism Problem With Time Delay, Proceeding of IFAC the 7th World Congress (1978).

〔2〕 方崇智、钱唯德、张金水，应用线性变换方法设计随动系统的鲁棒调节器，清华大学学报科学报告，TH82015(1982).

〔3〕 EDWARD. W. KAMEN, An Operator Theory of Linear Functional Differential Equations, Journal of Differential Equations, 27, 2(1978), 274—298.

ROBUST REGULATOR FOR CONTROL SYSTEMS WITH TIME DELAY

Fang Chongzhi, Qian Weide, Zhang Jinshui

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

In this paper, a linear time invariant system is considered as a linear transformation in the finite dimensional solution space of the system, and the designing methods of its robust regulator are discussed in a general sense. The basic results of the servomechanism robust regulator are thus extended to a class of more complex systems with time delay.