第2卷 第2期 控制理论与应用 Vol.2, No.2
1985年4月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS April, 1985

广义状态空间系统的强能控性和强能观性

许 可 康

（中国科学院系统科学研究所）

摘 要

本文利用了奇异摄动系统的降阶形式，讨论了广义状态空间系统的强能控性和强能观性，给出了系统是强能控的、强能观的及强既约的充分和必要条件。

一、引 言

自从Rosenbrock[1]和Luenberger[2]等首先讨论了广义状态空间系统后，Verghese在1978年定义了系统的强能控性和强能观性[3]，并给出了相应的判据。其后，在1980年Pandolfi提出了$\mathbf{D}_j(j=1,2,3)$能控的概念[4]，Yip和Sincovec又提出了广义状态空间系统的C－能控与R－能控的概念[5]。Yan和Tarn在〔6〕中给出了判别系统是强能控及强能观的一种新判据。

本文联系线性奇异摄动系统的降阶系统的形式，讨论并给出了广义状态空间系统的强能控性与强能观性的等价判据。

二、预 备 知 识

本文讨论由正则束$(sE-A)$组成的广义状态空间系统。

$$\begin{cases} E\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}, \\ \mathbf{y}=C\mathbf{x}. \end{cases} \tag{1}$$

定义1[3] 称系统(1)是强能控的，是指：该系统没有无穷输入解耦零点，且在正则意义下能控。称系统(1)是强能观的，是指：该系统没有无穷输出解耦零点，且在正则意义下能观。

对于两个广义状态空间系统之间，我们采用Rosenbrock在〔1〕中给出的等价定义。

定义2[1] 称系统(1)与系统

本文于1983年12月27日收到。1984年4月18日收到修改稿。

$$\begin{cases} E_1\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u, \\ y = C_1 x \end{cases} \tag{2}$$

是被限制的系统等价的，是指：存在非异常阵M与N，使

$$E_1 = MEN, \qquad A_1 = MAN,$$
$$B_1 = MB, \qquad C_1 = CN.$$

对于系统(1)，当考虑进行状态反馈

$$u = Kx + v \tag{3}$$

时，总假定闭环系统的矩阵束$(sE - A - BK)$仍是正则束.

由[3]知，在状态反馈(3)下，系统(1)的强能控性不变.

对系统(1)，可等价地化成下列标准形

$$\begin{cases} \dot{x}_s = A_s x_s \quad + B_s u, \\ E_f \dot{x}_f = \quad x_f + B_f u, \\ y = \quad C_s x_s + C_f x_f. \end{cases} \tag{4}$$

其中　E_f为幂零块. 文[7]进一步指出，用慢反馈

$$u = K_s x_s$$

不能改变快子系统，而用快反馈

$$u = K_f x_f$$

可将能控的脉冲模变成有穷的，即将系统的无穷远能控极点变成有穷极点.

在文[8]中，给出了判断无穷远零点结构的准则，即

引理1[8]　对矩阵束$(sH - L)$左乘非异常阵W，使

$$W(sH - L) = s\begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix},$$

其中　H_1为行满秩阵. 则$(sH - L)$没有无穷零点的充分必要条件为

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} H_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\ (sH - L).$$

三、系统的强能控性与强能观性

对系统(1)，设$\operatorname{rank} E = r$. 则一定存在非异的$M_1$与$N_1$，使

$$M_1 E N_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

这时，系统(1)等价于

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u, \\ y = (C_1 \quad C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$x = N_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, M_1 B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

$$CN_1 = (C_1 \quad C_2).$$

引理 2 ①系统(5)没有无穷输入解耦零点的充分必要条件是：$[A_{22} \quad B_2]$行满秩.

②系统(5)没有无穷输出解耦零点的充分必要条件是：$\begin{bmatrix} A_{22} \\ C_2 \end{bmatrix}$列满秩.

证 由于这两种情形是相对耦的，我们就只证明①.

显然，$[A_{22} \quad B_2]$行满秩与$\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & -B_2 \end{bmatrix}$行满秩等价. 由引理 1 知，后者与

$$s\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \end{bmatrix}$$

没有无穷零点等价，因此与系统(5)没有无穷输入解耦零点等价.

如果 A_{22} 非异，再引入

$$M_2 = \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix},$$

则系统(5)等价于

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ B_2 \end{pmatrix} u, \\ y = \begin{pmatrix} C_1-C_2A_{22}^{-1}A_{21} & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}.$$

这时，有

定理 1 当系统(1)经 M_1、N_1 等价化为系统(5)，而 A_{22} 为非异时，则系统(1)是强能控的充分必要条件是：(A_0, B_0)是完全能控对；系统(1)是强能观的充分必要条件

是：(A_0, C_0)是完全能观对．这里

$$A_0 \triangleq A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21},$$

$$B_0 \triangleq B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2,$$

$$C_0 \triangleq C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}.$$

证　当(5)式中的A_{22}非异时，可知M_2与N_2存在且非异，因此系统(1)与系统(6)是被限制的系统等价的．由引理2知，系统(6)既没有无穷输入解耦零点，又没有无穷输出解耦零点．对非异的A_{22},引入

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = A_{22}\bar{\mathbf{x}}_2,$$

则系统(6)等价于

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_0 \\ B_2 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} C_0 & C_2A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{7}$$

它是广义状态空间系统(1)的标准形．由〔3〕知，它在正则意义下的能控能观性，由子系统(A_0, B_0, C_0)描述．由此定理得证．

显然，还可有

系　在定理1的条件下，系统(1)是强既约的充分必要条件是：系统(A_0, B_0, C_0)是完全的。

注　事实上，系统(6)即是线性奇异摄动系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = A_{11}\mathbf{w} + A_{12}\mathbf{z} + B_1\mathbf{u}, \\ \varepsilon\dot{\mathbf{z}} = A_{21}\mathbf{w} + A_{22}\mathbf{z} + B_2\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = C_1\mathbf{w} + C_2\mathbf{z} \end{cases} \tag{8}$$

当A_{22}非异时的降阶系统．在〔9〕中，Chow 称奇异摄动系统(8)是强能控的，是指(A_0, B_0)及(A_{22}, B_2)均是能控对。因此奇异摄动系统的强能控性与广义状态空间系统的强能控性是不同的。

对系统(5)，当$[A_{22}\quad B_2]$行满秩时，必存在K_2，使$(A_{22}+B_2K_2)$非异．这时，系统(5)经状态反馈

$$\mathbf{u} = K_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{v} \tag{9}$$

可得

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}+B_1K_2\\ A_2 & A_{22}+B_2K_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}v,\\ y=(C_1\quad C_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.\end{cases}\tag{10}$$

这时，有

定理 2　当系统(1)经M_1、N_2等价化为系统(5)，其中$[A_{22}\quad B_2]$行满秩，并设$(A_{22}+B_2K_2)$是非异阵时，系统(1)是强能控的充分必要条件是：$(\overline{A}_0、\overline{B}_0)$是完全能控对，这里

$$\overline{A}_0=A_{11}-(A_{12}+B_1K_2)\ (A_{22}+B_2K_2)^{-1}A_{21},$$

$$\overline{B}_0=B_1-(A_{12}+B_1K_2)\ (A_{22}+B_2K_2)^{-1}B_2.$$

证　系统(5)经状态反馈(9)后得系统(10)．由[3]知，系统(5)的强能控性等价于系统(10)的强能控性，再对系统(10)应用定理1可证得．

对应地，有

定理 3　当系统(1)经M_1、N_1等价化为系统(5)，其中$\begin{bmatrix}A_{22}\\C_2\end{bmatrix}$列满秩，并设$(A_{22}+G_2C_2)$是非异阵时，系统(1)是强能观的充分必要条件是：$(\widetilde{A}_0、\widetilde{C}_0)$是完全能观对，这里

$$\widetilde{A}_0\triangleq A_{11}-A_{12}(A_{22}+G_2C_2)^{-1}(A_{21}+G_2C_1),$$

$$\widetilde{C}_0\triangleq C_1-C_2(A_{22}+G_2C_2)^{-1}(A_{21}+G_2C_1).$$

事实上，对系统(5)，当$[A_{22}\quad B_2]$行满秩且A_{22}是奇异阵时，则一定存在非异的$\overline{M}_3$与$\overline{N}_3$，使

$$\overline{M}_3A_{22}\overline{N}_3=\begin{bmatrix}A_{221} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

这里，A_{221}为非异阵。设

$$\overline{M}_3B_2=\begin{bmatrix}B_{21}\\B_{22}\end{bmatrix},\quad x_2=\overline{N}_3\begin{bmatrix}x_{21}\\x_{22}\end{bmatrix}.$$

则由$[A_{22}\quad B_2]$的行满秩性知：B_{22}是行满秩阵．这样，系统(5)可等价化为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{121} & A_{122}\\ A_{211} & A_{221} & 0\\ A_{212} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_{21}\\x_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1\\B_{21}\\B_{22}\end{pmatrix}u,\\ y=(C_1\quad C_{21}\quad C_{22})\begin{pmatrix}x_1\\x_{21}\\x_{22}\end{pmatrix},\end{cases}\tag{11}$$

其中

$$A_{12}\overline{N}_3=[A_{121}\quad A_{122}],$$

$$\overline{M}_3A_{21}=\begin{bmatrix}A_{211}\\ A_{212}\end{bmatrix},$$

$$C_2\overline{N}_3=[C_{21}\quad C_{22}].$$

由于A_{221}非异，类似于系统(5)与系统(6)的等价关系，可把系统(11)等价变换到下列系统

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}^0 & 0 & A_{122}\\ 0 & A_{221} & 0\\ A_{212} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \overline{x}_{21}\\ x_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1^0\\ B_{21}\\ B_{22}\end{pmatrix}u,\\ y=(C_1^0\quad C_{21}\quad C_{22})\begin{pmatrix}x_1\\ \overline{x}_{21}\\ x_{22}\end{pmatrix},\end{array}\right. \qquad (12)$$

其中

$$\overline{x}_{21}\triangleq A_{221}^{-1}A_{211}x_1+x_{21},$$

$$A_{11}^0\triangleq A_{11}-A_{121}A_{221}^{-1}A_{211},$$

$$B_1^0\triangleq B_1-A_{121}A_{221}^{-1}B_{21},$$

$$C_1^0\triangleq C_1-C_{21}A_{221}^{-1}A_{211}.$$

由于B_{22}行满秩，必存在非异的G，使

$$B_{22}G=[B_{221}\quad 0], \qquad (13)$$

这里，B_{221}是非异阵．设

$$u=G\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix},$$

则(12)式的第三个式子为

$$A_{212}x_1+B_{221}u_1=0.$$

即有

$$u_1=-B_{221}^{-1}A_{212}x_1. \qquad (14)$$

设

$$B_1^0G=[B_{11}^0\quad B_{12}^0]. \qquad (15)$$

将(14)式代入(12)式的第一式，得

$$\dot{x}_1 = (A^0_{11} - B^0_{11} B^{-1}_{221} A_{212}) x_1 + A_{122} x_{22} + B^0_{12} u_2. \tag{16}$$

于是，有

定理 4　当系统(1)经M_1、N_1等价化为系统(5)，$[A_{22} \quad B_2]$行满秩但A_{22}奇异时，可将系统(5)等价化为系统(12)。这时系统(1)是强能控的充分必要条件是：$(\bar{A}^0_{11}、\bar{B}^0_1)$是完全能控对，这里

$$\bar{A}^0_{11} \triangleq A^0_{11} - B^0_{11} B^{-1}_{221} A_{212},$$

$$\bar{B}^0_1 \triangleq [A_{122} \quad B^0_{12}],$$

而B_{221}、B^0_{11}、B^0_{12}等由式(13)与(15)给出.

证　由等价变换知，系统(1)的强能控性与系统(12)的强能控性等价. 由(13)式，取

$$K = G\begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的状态反馈

$$u = K\begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{x}_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} + v,$$

则(12)式在此状态反馈下可得闭环系统

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0_{11} & 0 & A_{122} + B^0_1 G\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & A_{221} & B_{21} G\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \\ A_{212} & 0 & B_{22} G\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{x}_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^0_1 \\ B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix} v, \\ y = \begin{pmatrix} C^0_1 & C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \bar{x}_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{17}$$

系统(12)的强能控性等价于系统(17)的强能控性. 由定理1知，系统(17)是强能控的充分必要条件是：$(\bar{A}, \bar{B})$是完全能控对，这里

$$\bar{A} = A^0_{11} - \begin{bmatrix} 0 & A_{122} + B^0_1 G\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{221} & B_{21} G\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & B_{22} G\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ A_{212} \end{pmatrix},$$

$$\overline{B}=B_1^0-\begin{bmatrix}0 & A_{122}+B_1^0G\begin{pmatrix}I\\0\end{pmatrix}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A_{221} & B_{21}G\begin{pmatrix}I\\0\end{pmatrix}\\ 0 & B_{22}G\begin{pmatrix}I\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_{21}\\B_{22}\end{bmatrix}.$$

利用(13)与(15)式，经化简有

$$\overline{A}=A_{11}^0-(A_{122}+B_{11}^0)B_{221}^{-1}A_{212}=\overline{A}_{11}^0-A_{122}B_{221}^{-1}A_{212},$$

$$\begin{aligned}\overline{B}&=B_1^0-(A_{122}+B_{11}^0)B_{221}^{-1}B_{22}\\&=(B_1^0G-(A_{122}+B_{11}^0)B_{221}^{-1}B_{22}G)G^{-1}\\&=([B_{11}^0\quad B_{12}^0]-[A_{122}+B_{11}^0\quad 0])G^{-1}\\&=[-A_{122}\quad B_{12}^0]G^{-1},\end{aligned}$$

即

$$\overline{A}=\overline{A}_{11}^0=\overline{B}_1^0K,\quad \overline{B}=\overline{B}_1^0\begin{bmatrix}-I & 0\\0 & I\end{bmatrix}G^{-1},$$

其中

$$K=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}B_{221}^{-1}A_{212}.$$

因此，$(\overline{A},\ \overline{B})$完全能控等价于$(\overline{A}_{11}^0,\ \overline{B}_1^0)$完全能控.

对应地，如果在系统(5)中$\begin{bmatrix}A_{22}\\C_2\end{bmatrix}$列满秩而$A_{22}$为奇异时，则在系统(12)中$C_{22}$列满秩．这时设存在非异的$H$，使

$$HC_{22}=\begin{bmatrix}C_{221}\\0\end{bmatrix},\tag{18}$$

其中C_{221}为非异阵．设

$$HC_1^0=\begin{bmatrix}C_{11}^0\\C_{21}^0\end{bmatrix}.\tag{19}$$

则类似于定理4，有

定理5　当系统(1)经M_1、N_1等价化为系统(5)，$\begin{bmatrix}A_{22}\\C_2\end{bmatrix}$列满秩但$A_{22}$奇异时，可将系统(5)等价化为系统(12)，则系统(1)是强能观的充分必要条件是：$(\widetilde{A}_{11}^0,\ \widetilde{C}_1^0)$

是完全能观对，这里

$$\tilde{A}^0_{11} \triangleq A^0_{11} - A_{122} C^{-1}_{221} C^0_{11},$$

$$\tilde{C}^0_2 \triangleq \begin{bmatrix} A_{212} \\ C^0_{21} \end{bmatrix},$$

其中，C_{221}、C^0_{11}、C^0_{21}由式(18)、(19)给出.

四、结　论

本文把广义状态空间系统等价化为线性奇异摄动系统的降阶系统的形式，来讨论的强能控性和强能观性，给出了系统是强能控或强能观的充分必要条件。这些条件的定，比把矩阵束化为Kronecker标准形要方便得多. 事实上，在系统(5)中，当$[A_{22}\ B_2]$不行满秩时，表示该系统有无穷输入解耦零点；当$[A_{22}\ \ B_2]$行满秩但A_{22}奇异时，表示该系统有能控的无穷极点. 这时，我们用适当的反馈把能控的无穷极点变成能控有穷极点.

在本文给出的几个判据中，定理1事实上是定理2、3的一种特殊情况（即$K_2=$或$G_2=0$）.

参考文献

[1] Rosenbrock, H. H., Structural properties of linear dynamic systems, Int. J. Control, **20**, 2,(1974)191—202.

[2] Luenberger, D. G., Dynamical equations in descript form, IEEE Trans. AC, **22**, 3,(1977)312—321.

[3] Verghese, G., Infinite-frequency befavior in generalized dynamical systems, Ph. D. dissertation, Dept. of Electrical Eng., Stanford Univ., December(1978).

[4] Pandolfi, L., Controllability and stabilization for linear system of algebraic and differential equations, JOTA, **30**, 4,(1980) 601—620.

[5] Yip, E. L. & R. F. Sincoves, Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems, IEEE Trans. AC, **26**,3,(1981)702—707.

[6] Yan, Gongtian & T. J. Tarn, Strong controllability and strong observability of generalized dynamical systems, Proceedings 20th Annual Allerton Conference Communication Control and Computing, Dec. (1982).

[7] Cobb, D. , Feedback and pole placement in descriptor variable systems, Int. J. Control, **33**, 6,(1981)1135—1146.

[8] Verghese, G., P. Van Dooren & T. Kailath, properties of the system matrix of a generalized state space system, Int. J, Control, **30**, 2,(1979)235—243.

[9] Chow, J. H., Preservation of controllability in linear time-invariant perturbed systems, Int. J. Control, **25**, 5,(1977)697—704.

STRONG CONTROLLABILITY AND STRONG OBSERVABILITY OF GENERALIZED STATE SPACE SYSTEMS

Xu Kekang

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper we discuss the strong controllability and the strong observability of the generalized state space system

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{cases} \tag{1}$$

using the corresponding reduced form of singular perturbation linear systems.

The system (1) is a restricted system equivalent to

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u, \\ y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{5}$$

Then we have

Theorem 2. For the system (5), if $[A_{22} \ B_2]$ is full row rank and $(A_{22}+B_2K_2)$ is a nonsingular matrix, then the system (1) is strongly controllable if and only if the pair $(\overline{A_0}, \overline{B_0})$ is controllable, where

$$\overline{A_0} = A_{11} - (A_{12}+B_1K_2)(A_{22}+B_2K_2)^{-1}A_{21},$$
$$\overline{B_0} = B_1 - (A_{12}+B_1K_2)(A_{22}+B_2K_2)^{-1}B_2.$$

In case that A is a singular matrix, the problem is further discussed and the necessary and sufficient conditions are given respectively (see Theorem 4–5).

The method presented in the paper for determnining whether the system (1) is strongly controllable (observable) is more convenient than the known one by transforming the system (1) to Kronecker form.