第2卷 第2期
1985年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 2, No.2
April, 1985

一类快速控制问题的矩量方法

邵　剑

（浙江大学）

摘　要

本文用矩量方法考虑一类n阶动力系统$\frac{d^n y}{dt^n}=u(t)$的时间最佳控制问题，确定其最佳控制和最佳时间。所得的最佳时间为$T_n=2\sqrt[n]{(n-1)!\,2^{n-2}x_{10}}$.

А. Г. Бутковский[1]用矩量方法只对一类二阶系统的时间最佳控制问题

$$\ddot{x}(t)=u(t),\quad |u(t)|\le 1,\quad t\in[0,T].$$
$$(x(0),\dot{x}(0))=(x_{10},\dot{x}_{10}),$$
$$(x(T),\dot{x}(T))=(0,0),$$
$$J=\int_0^T dt=\min,$$

求出了过程的最佳时间. 本文把一类n阶系统$\frac{d^n y}{dt^n}=u(t)$的时间最佳控制问题转换成一矩量问题，然后归结为一代数方程组的方法来计算其最佳时间，它比[1]方便些，作为例子，具体求出了三、四、五、六阶系统的过程最佳时间，它在工程技术上有直接的实际意义.

假设我们讨论的一类快速控制问题的系统运动方程式是

$$\frac{d^n y}{dt^n}=u(t),\tag{1}$$

其中 $u(t)$是连续或只有有限个第一类间断点的控制函数，或为有界可测函数，且满足条件

$$\|u(t)\|=\max_{t\in[0,T]}|u(t)|\le 1.$$

这些条件在工程技术上是有其实际背景的. 显然，可以把上面的运动方程式写成方程组

$$Lx=bu(t),\tag{1'}$$

本文于1983年6月 4日收到. 1984年5月21日收到修改稿.

其中 L 表示线性微分算子，即

$$L=\frac{d}{dt}-A,$$

而

$$x(t)=(x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))^T,$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$b=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)^T_n.$$

设系统的初始状态和终端状态为

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

$$x(T)=0, \tag{3}$$

其中 终端时间 T 是不固定的；n 维初始向量 x_0 可以不妨设为

$$x_0=(x_{10},0,\cdots,0)^T,$$

且 $x_{10}>0$；（3）式右端为 n 维零向量．这样，n 阶系统（1）的时间最佳控制问题在于：求控制函数 $u(t)$，以便系统（1）的点以最小时间 T 从初始状态（2）到达坐标原点，且 $\|u(t)\|\leq 1$．

初值问题（1）、（2）有解

$$x(t)=G(t)x_0+G(t)\int_0^t G^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau, \tag{4}$$

其中

$$G(t)=e^{At}=\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ \cdots & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

显然，$G(t)$ 非奇异．且 $G^{-1}(t)=e^{-At}$，可得

$$G^{-1}(t)b=\left(\frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!},\ \frac{(-t)^{n-2}}{(n-2)!},\ \cdots,\ -\frac{1}{6}t^3,\ \frac{1}{2}t^2,\ -t,1\right)^T.$$

让解（4）满足终端条件（3）就有

$$\begin{pmatrix} (-1)^n(n-1)!x_{10} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^T \begin{pmatrix} t^{n-1} \\ t^{n-2} \\ \vdots \\ t \\ 1 \end{pmatrix} u(t)dt. \tag{5}$$

于是，系统(1)的时间最佳控制问题就归结为：求控制函数 $u(t)$，$0\le t\le T$，$\|u(t)\|\le 1$，使得(5)式在最小时间 T 之下成立．记它为有界可测函数空间 $M[0,T]$ 的矩量问题 (B)．

由[1]可知，在有界可测函数空间 $M[0,T]$ 中，矩量问题 (B) 的解存在的充要条件是对所有的实数常向量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 满足

$$|\langle\xi,\beta\rangle|\le\int_0^T|\langle\xi,g(t)\rangle|dt,$$

其中

$$\beta=((-1)^n(n-1)!x_{10},0,\cdots,0)^T,$$
$$g(t)=(t^{n-1},t^{n-2},\cdots,t,1)^T.$$

且知在 $M[0,T]$ 中的最佳控制函数是

$$u(t)=\operatorname{sgn}\sum_{i=1}^n\xi_i t^{n-i}. \tag{6}$$

而向量 ξ 和最佳时间 T 应是下面问题的解：在条件

$$(-1)^n(n-1)!x_{10}\xi_1=1$$

下使

$$\min_\xi\int_0^T|\langle\xi,g(t)\rangle|dt=\min_\xi\int_0^T\left|\sum_{i=1}^n\xi_i t^{n-i}\right|dt=1 \tag{7}$$

成立．故有

$$\xi_1=\frac{(-1)^n}{(n-1)!x_{10}}.$$

因此，问题转为考虑(7)关于 $\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的极小值．设

$$F(\xi_2,\cdots,\xi_n)=\int_0^T\left|\frac{(-1)^n t^{n-1}}{(n-1)!x_{10}}+\sum_{i=2}^n\xi_i t^{n-i}\right|dt,$$

令

$$\frac{\partial F}{\partial\xi_\alpha}=\int_0^T\operatorname{sgn}\left[\frac{(-1)^n t^{n-1}}{(n-1)!x_{10}}+\sum_{i=2}^n\xi_i t^{n-i}\right]\cdot t^{n-\alpha}dt=0,\quad \alpha=2,\cdots,n. \tag{8}$$

我们依 $n-1$ 次多项式

$$P_{n-1}(t)=\frac{(-1)^n t^{n-1}}{(n-1)!x_{10}}+\sum_{i=2}^{n}\xi_i t^{n-i}$$

根的情况分别讨论如下：

1° 设 $P_{n-1}(t)=0$ 无正实根，则在$[0,T]$上 $\operatorname{sgn}P_{n-1}(t)$或恒为 $+1$ 或恒等于 -1，于是(8)式左边恒不为0．

2° 设 $P_{n-1}(t)=0$ 有一正实根 $t_1\in(0,T)$，此时 $P_{n-1}(t)$ 在$(0,T)$上有一次变号，故(8)式为

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}=\pm\left(\frac{2}{n-\alpha+1}t_1^{n-\alpha+1}-\frac{1}{n-\alpha+1}T^{n-\alpha+1}\right)=0,\quad \alpha=2,\ \cdots,\ n.$$

由最后一式得 $t_1=\dfrac{T}{2}$，代入前 $n-2$ 个式子皆不成立，故这 $n-1$ 个方程是互相矛盾的，不能同时成立．

3° 设 $P_{n-1}(t)=0$ 有小于 $n-1$ 个正实根属于$(0,T)$，则 $P_{n-1}(t)$ 在$(0,T)$上有 $n-1$ 次以下变号．如同情况2°，所求得的 $n-1$ 个方程 $\dfrac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}=0$，$\alpha=2,\ \cdots,\ n$，也是互相矛盾，不能同时成立．

4° 如果 $P_{n-1}(t)=0$ 有 $n-1$ 个不同的正实根属于$(0,T)$，设它们为

$$t_0=0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T. \tag{9}$$

从而(8)式化为

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\int_{t_i}^{t_{i+1}}t^{n-\alpha}dt=\frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha+1}T^{n-\alpha+1}+\frac{2}{n-\alpha+1}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}t_i^{n-\alpha+1}=0,$$

$$\alpha=2,\ \cdots,\ n.$$

即得 $P_{n-1}(t)=0$ 的$(n-1)$个不同正实根满足方程组

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}t_i^{n-\alpha+1}=\frac{(-1)^n}{2}T^{n-\alpha+1},\quad \alpha=2,\ \cdots,\ n. \tag{10}$$

注意到多项式性质，显然有

$$\xi_2=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!x_{10}}\sum_{i=1}^{n-1}t_i,\quad \xi_3=\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!x_{10}}\sum_{1\le i_1<i_2\le n-1}t_{i_1}t_{i_2},$$

$$\cdots\cdots \tag{11}$$

$$\xi_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!x_{10}}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-2}\le n-1}t_{i_1}\cdots t_{i_{n-2}},\quad \xi_n=-\frac{1}{(n-1)!x_{10}}t_1t_2\cdots t_{n-1}.$$

将（11）代入（6）式得空间 M 中最佳控制函数

$$u(t)=\operatorname{sgn}\left\{(-1)^n t^{n-1}+\left[(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} t_i\right]t^{n-2}\right.$$

$$+\left[(-1)^{n-2}\sum_{1\le i_1<i_2\le n-1} t_{i_1}t_{i_2}\right]t^{n-3}+\cdots$$

$$\left.+\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-2}\le n-1} t_{i_1}\cdots t_{i_{n-2}}\right)t-t_1t_2\cdots t_{n-1}\right\}. \tag{12}$$

其中 t_i，$i=1$，…，$n-1$ 可由（10）式求得．

在最佳控制函数（12）作用下，积分

$$\int_0^T |\langle\xi,g(t)\rangle|dt=\frac{1}{(n-1)!x_{10}}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left|(-1)^n t^{n-1}+\left[(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}t_i\right]t^{n-2}\right.$$

$$+\left[(-1)^{n-2}\sum_{1\le i_1<i_2\le n-1} t_{i_1}t_{i_2}\right]t^{n-3}+\cdots+\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-2}\le n-1}t_{i_1}\cdots t_{i_{n-2}}\right)t$$

$$\left.-t_1t_2\cdots t_{n-1}\right|dt \tag{13}$$

容易求得，它等于

$$\frac{1}{(n-1)!2^{2^{n-2}}x_{10}}T^n.$$

从（7）式可知，过程的最佳时间为

$$T=2\sqrt[n]{(n-1)!2^{n-2}x_{10}}\,. \tag{14}$$

综合所述，有

定理　在有界可测函数空间 M 中存在形如（12）的最佳控制函数 $u(t)$，使 n 阶系统（1）的时间最佳控制问题的最佳时间取为（14）式．

用上面提出的方法来计算 $n=2$ 的结果，显然与 А．Г．Бутковский 的结论相吻合．现用该方法把有一定意义的时间最佳控制问题的几个结果，列成下表．

致谢　本文得到张学铭教授的指导，并审阅了全文，在此深表感谢！

n	（10）的根 t_i	最佳控制函数 $u(t)$	最佳时间 T
2	$t_1=\frac{T}{2}$	$\mathrm{sgn}\left(t-\frac{T}{2}\right)$	$2\sqrt{x_{10}}$
3	$t_1=\frac{T}{4}$ $t_2=\frac{3}{4}T$	$\mathrm{sgn}\left(-t^2+Tt-\frac{3}{16}T^2\right)$	$2\sqrt[3]{4x_{20}}$
4	$t_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)T$ $t_2=\frac{1}{2}T$ $t_3=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)T$	$\mathrm{sgn}\left(t^3-\frac{3}{2}Tt^2+\frac{5}{8}T^2t-\frac{1}{16}T^3\right)$	$2\sqrt[4]{24x_{10}}$
5	$t_1=\frac{3-\sqrt{5}}{8}T$ $t_2=\frac{5-\sqrt{5}}{8}T$ $t_3=\frac{3+\sqrt{5}}{8}T$ $t_4=\frac{5+\sqrt{5}}{8}T$	$\mathrm{sgn}\left(-t^4+2Tt^3-\frac{21}{16}T^2t^2+\frac{5}{16}T^3t-\frac{5}{256}T^4\right)$	$2\sqrt[5]{192x_{10}}$
6	$t_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)T$ $t_2=\frac{1}{4}T$ $t_3=\frac{1}{2}T$ $t_4=\frac{3}{4}T$ $t_5=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)T$	$\mathrm{sgn}\left(t^5-\frac{5}{2}Tt^4+\frac{9}{4}T^2t^3-\frac{47-3\sqrt{3}}{64}T^3t^2+\frac{35}{256}T^4t-\frac{3}{512}T^5\right)$	$2\sqrt[6]{1920x_{10}}$

参考文献

〔1〕 А. Г, Бутковский, Теория Оптималъного Управления Системами с Распределенными Параметрами, Москва, 1965.

ON THE MOMENT METHOD FOR A CLASS OF TIME OPTIMAL CONTROL

Shao Jian

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

In this paper we considered the time optimal control of a dynamic system $\frac{d^n y}{dt^n}=u(t)$ by the method of moment, established the optimal control function and determined the optimal time which is

$$T_n=2\sqrt[n]{(n-1)!2^{n-2}x_{10}}$$

中国自动化学会简介

中国自动化学会成立于1961年。它的第一、二届理事长是钱学森同志。现任理事长是宋健同志。中国自动化学会是国内较大的学会之一，同时也是国际自动控制联合会（简称IFAC）的创始国组织之一。

全国二十二个省、市和自治区成立了地方自动化学会，共有会员一万多名。

自动化学会下设十三个专业委员会，即：控制理论、应用、仪表与装置、计算机应用、系统仿真、系统工程、空间及运动体控制、生物控制论与医学工程、电气自动化、遥测遥感遥控、模式识别和机器智能、计算机图形学和辅助设计、机器人。有三个工作委员会，即：普及工作委员会、教育工作委员会和名词工作委员会。学会还设有科技咨询服务部和学会办公室。

学会办有三种刊物，即：《自动化学报》、《信息与控制》、《自动化》。

为了加强国际学术交流，中国自动化学会向IFAC十多个技术委员会派出了代表。这些委员会是：控制理论、应用、生物医学工程、元件和仪表、计算机、发展中国家经济和管理系统、教育、制造技术、控制数学、空间、系统工程等。

中国自动化学会的常设机构为学会办公室。通讯地址：北京中关村中国科学院自动化研究所。电话：28.4294。

（中国自动化学会办公室）