第2卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol. 2, No. 2
1985年 4月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　April, 1985

人口系统能控性的探讨

刘秦玉　　柴洪山

（山东海洋学院物理海洋系）　（山东建材机械厂）

摘　要

本文就控制具有下确界约束的人口发展过程能控性进行了探讨。定义了相应的人口状态空间，提出并证明了人口控制系统在人口状态空间中能控性的充要条件。

一、引　言

人口控制问题已成为世界人民所关心的重要问题。人口系统的能控性则是人口控制的基本理论之一，也是研究人口系统最优控制及其它问题的基础[1]。

于景元等同志首次提出了人口系统能控性问题，并对其进行了深入地研究，解决了在控制有上确界约束情况下的人口系统能控性问题[1]，给予我们很大的启发。根据目前世界及我国控制人口增长的现状，有必要再对控制具有下界约束的人口系统能控性问题进行探讨，以求更有利于解决相应的人口系统最优控制问题[4]。

本文采用人口系统离散的数学模型[2]来研究人口系统的能控性。

在不考虑随机因素引起的扰动，并将由死亡率决定的状态转移矩阵[2]及生育矩阵[2]都视为常矩阵的情况下，离散的人口系统的数学模型为

$$X(t+1)=HX(t)+\beta(t)BX(t), \tag{1.1}$$

其中 $X(t)=[x_0(t),\ x_1(t),\ \cdots,\ x_m(t)]^T$ 称为人口状态向量，而

$$B=\left(\begin{array}{c} 0,\ \cdots,\ 0,\ \delta_{r_1},\ \delta_{r_1+1},\ \cdots,\ \delta_{r_2},\ 0,\ \cdots,\ 0 \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right),$$

$$H=\begin{pmatrix} 0, & \cdots & & & 0 \\ \eta_0, & 0, & \cdots & & 0 \\ 0, & \eta_1, & 0, & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0, & \cdots & & \eta_{m-1}, & 0 \end{pmatrix},$$

$\eta_i\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$ 为人口按龄留存率。

本文于1983年8月29日收到。1984月4月26日收到修改稿。

$\delta_i(i=r_1, r_1+1, \cdots, r_2)$ 为妇女生育能力的按龄分布，r_1、r_2 分别为育龄区间下限和上限。

$\beta(t)$ 表示一对夫妇一生中平均生育的零岁人口数。

t 为年代取整数。m 为人类活到的最高岁数。

二、人口状态空间

人口控制系统（1.1）中的状态向量 $X(t)$ 是表示人口数的按龄分布，若要使其有现实的物理意义，必须有 $X(t)\in R_+^{m+1}$（$m+1$ 维欧氏空间的正半空间，$\forall t$）。但，R_+^{m+1} 中还存在一些特殊的点集，不能用以表征人口状态向量。又，由于人的生育能力是有限的，控制量 $\beta(t)$ 定有一个上确界 $\overline{\beta}$[1]；而另一方面，考虑人类社会存在着一个人们所能接受的最低控制量，即 $\beta(t)$ 应具有一个下确界 β_0。下面就 $\beta(t)\geq\beta_0>0$ 的情况给出人口状态空间的明确定义。使得凡属于这个空间中的状态向量都具有现实的物理意义。

定义 1　凡满足

$$\frac{x_{k-1}(t)}{\left\{\prod\limits_{j=0}^{k-2}\eta_j\right\}\sum\limits_{i=r_1}^{r_2}\delta_i\dfrac{x_{i+k}(t)}{\prod\limits_{j=i}^{i+k-1}\eta_j}}\geq\beta_0 \tag{2.1}$$

$$(k=1, 2, \cdots, m-r_2)$$

$$\left(\text{其中}\prod_{j=0}^{-1}\eta_j=1\right)$$

$$\frac{x_{k-1}(t)}{\left\{\prod\limits_{j=0}^{k-2}\eta_j\right\}\sum\limits_{i=r_1}^{m-k}\delta_i\dfrac{x_{i+k}(t)}{\prod\limits_{j=i}^{i+k-1}\eta_j}}>\beta_0 \tag{2.1'}$$

$$(k=m-r_2+1, \cdots, m-r_1)$$

及

$$x_i(t)>0 \qquad (i=0, 1, \cdots, m) \tag{2.2}$$

的人口状态向量 $X(t)$ 所组成的空间称为人口状态空间，记为 R_0^{m+1}。

注意到式（2.1）左边实际就是 $\beta(t-k)(k=1, 2, \cdots, m-r_2)$，因而定义1正好表达了具有现实意义的人口状态向量各分量之间必须满足的约束条件。

三、人口系统的能控性

定义 2　控制列$\{\beta(t)\}(t=0, 1, \cdots, n)$中每一个元素$\beta(t)$都满足约束条件$\beta(t)\geq\beta_0$，则称$\{\beta(t)\}$为容许控制列.

定义 3　任给X_0、$X_T\in R_0^{m+1}$，若存在一个正整数n和容许控制列$\{\beta(t)\}(t=0, 1, \cdots, n-1)$使系统(1.1)从$X_0$出发经过$n$步转移到$X_T$，则称人口系统(1.1)在$R_0^{m+1}$中是能控的.

为叙述方便起见，引入符号

$$\Psi(k, X_0, \{\beta(t)\}) \qquad (t=0, 1, \cdots, k-1)$$

表示人口系统(1.1)从X_0出发在$\{\beta(t)\}$的控制下，经过k步转移到的人口状态向量. $\phi_i(k, X_0, \{\beta(t)\})(i=0, 1, \cdots, m)$表示第$i$个分量.

引理 1　若给定$X_T\in R_0^{m+1}$，则存在由X_T决定的容许控制$\{\beta_T(t)\}(t=n-(m-r_2), n-(m-r_2)+1, \cdots, n-1)$和与$X_T$相对应的集合$S_T$，且

$$S_T=\{\overline{X}:\ \Psi(m-r_2, \overline{X}, \{\beta_T(t)\})=X_T\}.$$

证　记$X(n)$为X_T　令

$$\left.\begin{aligned}
\beta_T(n-1)&=\frac{x_0(n)}{\sum\limits_{i=r_1}^{r_2}\delta_i\dfrac{x_{i+1}(n)}{\eta_i}},\\
\beta_T(n-2)&=\frac{x_1(n)}{\eta_0\sum\limits_{i=r_1}^{r_2}\delta_i\dfrac{x_{i+2}(n)}{\eta_i\eta_{i+1}}},\\
&\vdots\qquad\qquad\vdots\\
\beta_T(n-m+r_2)&=\frac{x_{m-r_2-1}(n)}{\prod\limits_{j=0}^{m-r_2-2}\eta_j\sum\limits_{i=r_1}^{r_2}\delta_i\dfrac{x_{i+m-r_2}(n)}{\prod\limits_{j=i}^{i+m-r_2-1}\eta_j}}.
\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

因为$X(n)=X_T\in R_0^{m+1}$，由表征R_0^{m+1}的定义式(2.1)、(2.1′)、(2.2)可知，$\beta_T(t)\geq\beta_1(t=n-1, n-2, \cdots, n-m+r_2)$. 故$\{\beta_T(t)\}$为容许控制列. 又令

$$\overline{x_i}(n-m+r_2)=\frac{x_{m-r_2+i}^{(n)}}{\prod\limits_{j=i}^{m-r_2+i-1}\eta_j}\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ r_2), \tag{3.2}$$

$\overline{x_i}(n-m+r_2)$ 任选（$i=r_2+1,\ r_2+2,\ \cdots,\ m$），且使 $\overline{X}(n-m+r_2)\in R_0^{m+1}$．

用式（3.2）表示的向量 $\overline{X}$ 组成一个集合，记为 S_T．当任给 $\overline{X}\in S_T$ 时，由（3.1）、（3.2）及人口系统数学模型（1.1）可得

$$\Psi(m-r_2,\ \overline{X},\ \{\beta_T(t)\})=X_T.$$

且显然与 $\{\beta_T(t)\}$ 相应的 $X(t)$ $(t=n-1,\ n-2,\ \cdots,\ n-m+r_2)\in R_0^{m+1}$．证毕．

引理2 若 $\beta_0<\beta_{cr}$（临界妇女生育率）[3]，对于任给定的 X_0、$X_T\in R_0^{m+1}$，总存在正整数 p 和容许控制列 $\{\beta(t)\}(t=0,\ 1,\ \cdots,\ p,\ p+1,\ \cdots,\ p+r_2)$ 使得 $X(p+r_2+1)=\Psi(p+r_2+1,\ X_0,\ \{\beta(t)\})\in S_T$．

证 给定 X_T，由引理1知，必存在由式（3.2）表示的集合 S_T，且 S_T 中的向量的前 r_2+1 个分量 $\overline{x_i}$（$i=0,\ 1,\ \cdots,\ r_2$）都相同，由式（3.2）表示．据 $\overline{x_i}$（$i=0,\ 1,\ \cdots,\ r_2$）可得出 r_2+1 个标量 $z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{r_2}$，令

$$z_{r_2}=\frac{1}{\delta_{r_2}}\left[\frac{\overline{x_0}}{\beta_0}-\sum_{i=r_1}^{r_2-1}\delta_i\frac{\overline{x_{i+1}}}{\eta_i}\right],$$

$$z_{r_2-1}=\frac{1}{\delta_{r_2}}\left[\frac{\overline{x_1}}{\beta_0\eta_0}-\left(\sum_{i=r_1}^{r_2-2}\delta_i\frac{\overline{x_{i+2}}}{\eta_i\eta_{i+1}}+\delta_{r_2-1}\frac{z_{r_2}}{\eta_{r_2-1}}\right)\right],$$

$\vdots$

$$z_{r_1}=\frac{1}{\delta_{r_2}}\left[\frac{\overline{x}_{r_2-r_1}}{\beta_0\prod\limits_{j=0}^{r_2-r_1-1}\eta_j}-\left(\frac{\delta_{r_1}z_{r_2}}{\prod\limits_{j=r_1}^{r_2-1}\eta_j}+\frac{\delta_{r_1+1}z_{r_2-1}}{\prod\limits_{j=r_1+1}^{r_2-1}\eta_j}+\cdots+\delta_{r_2-1}\frac{z_{r_1+1}}{\eta_{r_2-1}}\right)\right],$$

$\vdots$

$$z_0=\frac{1}{\delta_{r_2}}\left[\frac{\overline{x}_{r_2}}{\beta_0\prod\limits_{j=0}^{r_2-1}\eta_j}-\left(\delta_{r_1}\frac{z_{r_2-r_1}}{\prod\limits_{j=r_1}^{r_2-1}\eta_j}+\delta_{r_1+1}\frac{z_{r_2-r_1-1}}{\prod\limits_{j=r_1+1}^{r_2-1}\eta_j}+\cdots\right.\right.$$

$$+\delta_{r_2-1}\frac{z_1}{\eta_{r_2-1}}\Big)\Big],\tag{3.3}$$

再令
$$y_i=\frac{z_{r_2-i}}{\prod\limits_{j=i}^{r_2-1}\eta_i}\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ r_2),\tag{3.4}$$

$$\Big(\text{其中}\ \prod_{j=r_2}^{r_2-1}\eta_i=1\Big)$$

必存在正整数 $q\in[0,\ r_2]$ 使
$$y_q=\min_{0\le i\le r_2}\{y_i\}.\tag{3.5}$$

$\because\ \beta_0<\beta_{cr}$，由[3]知，对于任给的 $X_0\in R_0^{m+1}$，取 $\beta(t)=\beta_0$，则由 X_0 出发的轨线 $X(t)$ 具有
$$\lim_{t\to\infty}X(t)=[0].$$

因此，必存在某一时刻 $t'\ge0$，使 $X(t')=\Psi(t',\ X_0,\ \beta_0)$ 的前 r_2+1 个分量充分地小，以致于有
$$\frac{y_q}{\sum\limits_{i=r_1}^{r_2}\delta_ix_i(k)}\ge\beta_0\qquad(k=t',\ t'+1,\ \cdots,\ t'+r_2).$$

令 $p=t'+r_2+1$，
$$\beta_1(k)=\begin{cases}\beta_0 & (k=0,\ 1\cdots,\ t'-1),\\ \dfrac{y_q}{\sum\limits_{i=r_1}^{r_2}\delta_ix_i(k)} & (k=t',\ t'+1,\ \cdots,\ t'+r_2).\end{cases}$$

显然，$\beta_1(k)\ge\beta_0\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1)$ 亦属容许控制列。且令
$$x_i(p)=y_q\prod_{j=0}^{i-1}\eta_i\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ r_2)\quad\Big(\text{其中}\ \prod_{j=0}^{-1}\eta_i=1\Big).$$

根据式（3.4）、（3.5）知
$$x_i(p)<y_q\le y_i=\frac{z_{r_2-i}}{\prod\limits_{j=i}^{r_2-1}\eta_i},$$

$$\therefore \quad x_i(p)\prod_{j=i}^{r_2-1}\eta_i<z_{r_2-i} \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ r_2).$$

如将式(3.3)中的 z_{r_2-i} 以 $x_i(p)\prod_{j=i}^{r_2-1}\eta_j(i=0,\ 1,\ \cdots,\ r_2)$ 代之，欲使式(3.3)仍然成立，该式中的 β_0 亦应换成相应的控制列 $\beta_2(k)$，$(k=p,\ p+1,\ \cdots,\ p+r_2)$ 因式(3.3)中其它量未变，定有 $\beta_2(k)\geq\beta_0(k=p,\ p+1,\ \cdots,\ p+r_2)$。所以存在容许控制列 $\{\beta_2(k)\}$ 使 $\Psi(r_2+1,\ \mathbf{X}(p),\ \{\beta_2(k)\})=\overline{\mathbf{X}}$。

综上所述，存在正整数 p 和容许控制列 $\{\beta(k)\}=\{\beta_1(k)、\beta_2(k)\}\quad(k=0,1,\cdots,p,\ p+1,\ \cdots,\ p+r_2)$ 使得

$$\Psi(p+r_2+1,\ \mathbf{X}_0,\ \{\beta(k)\})=\Psi(r_2+1,\ \mathbf{X}(p),\ \{\beta_2(k)\})=\overline{\mathbf{X}} \quad \overline{\mathbf{X}}\in S_T.$$

显然，与 $\{\beta(k)\}$ 相对应的状态向量 $\mathbf{X}(k)\in\mathbf{R}_0^{m+1}\quad(k=0,\ 1,\cdots,p,\ p+1,\ \cdots,\ p+r_2)$。

定理 1 对于人口系统 $\mathbf{X}(t+1)=H\mathbf{X}(t)+\beta(t)B\mathbf{X}(t)$ 在人口状态空间 $\mathbf{R}_0^{m+1}$ 中能控的充分必要条件是：容许控制的下确界 $\beta_0<\beta_{cr}$（β_{cr} 为临界妇女生育率）。

证　充分性，由引理 2 知，当 $\beta_0<\beta_{cr}$ 时对于给定的 $\mathbf{X}_0$、$\mathbf{X}_T\in\mathbf{R}_0^{m+1}$，必有正整数 p 和容许控制列 $\{\beta(k)\}$ 使

$$\Psi(p+r_2+1,\ \mathbf{X}_0,\ \{\beta(k)\})=\overline{\mathbf{X}},\quad \overline{\mathbf{X}}\in S_T,$$

而 S_T 完全由 $\mathbf{X}_T$ 决定．由引理 1 知，

$$\mathbf{X}_T=\Psi(m-r_2,\ \overline{\mathbf{X}},\ \{\beta_T(t)\}),$$

$$\therefore\quad \mathbf{X}_T=\Psi(m-r_2+p+r_2+1,\ \mathbf{X}_0,\{\beta(k),\ \beta_T(t)\})=\Psi(m+p+1,\ \mathbf{X}_0,\ \{\beta(k),\ \beta_T(t)\}).$$

据定义 3，系统是能控的．

必要性，已知系统在 $\mathbf{R}_0^{m+1}$ 中能控，反设，$\beta_0\geq\beta_{cr}$，则 $\beta(t)\geq\beta_{cr}$，

$$\phi_i(k,\ \mathbf{X}_0,\ \{\beta(t)\})\geq\phi_i(k,\ \mathbf{X}_0,\ \{\beta_{cr}\})$$

$\because\quad \lim\limits_{k\to\infty}\phi_i(k,\ \mathbf{X}_0,\ \{\beta_{cr}\})=$ 常数[3]。

可令 $x_i=\min\limits_{k}\{\phi_i(k,\ \mathbf{X}_0,\ \{\beta_{cr}\})\}$.

再令 $x_i^0=x_i-\varepsilon_i$ 适当地选取 ε_i，可使得 $\mathbf{X}^0\in\mathbf{R}_0^{m+1}$。例如：

$$\varepsilon=\begin{cases}0 & (i=0,\ 1,\ \cdots,\ r_2)\\ a & (i=r_2+1,\ \cdots,\ m)\end{cases}\qquad \text{即可。}$$

（a 为给定的正整数）

显然，在$\beta(t)\geq\beta_{cr}$的情况下，无论怎样选择容许控制列$\{\beta(t)\}$和k，都不能使

$$\Psi(k,\ X_0,\ \{\beta(t)\}=X^0,$$

这与系统的能控性是矛盾的。故$\beta_0<\beta_{cr}$。证毕。

因此，人口系统在控制有下确界约束情况下的能控性完全取决于控制量的下确界是否小于临界妇女生育率β_{cr}。对于控制有上确界约束条件下的能控性，也完全取决于控制量的上确界是否大于临界妇女生育率β_{cr}[1]。可见β_{cr}无论在人口系统的稳定性方面，还是在能控性方面都是一个非常重要的参数。

致谢　本文承蒙陈祖浩副教授、于景元高级工程师的指导和帮助，在此表示深切的谢意。

参考文献

〔1〕于景元、岳丕玉、郭孝宽，人口系统的能控性，系统工程理论与实践，2，4（1982）.

〔2〕宋健、于景元、李广元，人口发展过程的预测，中国科学，9（1980）.

〔3〕宋健、于景元，人口系统稳定性理论的几个注记，科学通报 25（1980）.

〔4〕宋健，人口发展的双线性最优控制，自动化学报，6，4（1980）.

THE STUDY OF CONTROLLABILITY OF POPULATION SYSTEMS

Liu Qinyu

(Department of physical-Oceanography
Shandong College of Oceanology)

Chai Hongshan

(Boshan, Shan dong Machine Plant of Building Materials)

Abstract

In this paper we study the controllability of the population evolution process with lower bound and establish the correspondent population state space. Furthermore, the necessary and sufficient conditions for controllability of the population control systems in the population state space are presented and proved.