第2卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol.2, No.4
1985年10月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　October, 1985

延时过程纯滞后的一种降阶搜索算法*

谭鹤良　　　　徐冬玲
（湖南大学）　（中国科学院沈阳自动化研究所）

摘　　要

本文讨论了在特殊信号下，非真阶非真滞后模型参数的最小二乘估计与纯滞后之间的关系，提出了一种新的辨识纯滞后的方法——降阶搜索算法。

一、引　　言

纯滞后是过程结构中的一个重要参数，传统的辨识方法有：飞升曲线法，直接最小二乘逐步搜索法，最小二乘 B 参数提取法〔1〕以及相关分析法〔2〕。但飞升曲线法精度不高，其余方法则需要事先估计系统的阶和纯滞后的大概范围。对于大滞后系统，B 参数提取法求最小二乘解会遇到高阶矩阵求逆问题，微机上难以求解。

本文在证明了非真阶非真滞后下过程纯滞后的判别定理之后，指出纯滞后估计与事先选择的模型结构无关。从而取消了 R. ISERMANN 所提出的预选模型的阶必须大于或等于真阶与真滞后之和的条件，使估计计算中的高阶矩阵求逆问题可以降阶求解。进而提出了一种新的算法——纯滞后降阶搜索算法。

二、原　　理

延时过程的数学模型可写成下列形式：

$$y(k)=\sum_{i=1}^{m}a_i y(k-i)+\sum_{i=0}^{m}b_i u(k-d-i). \tag{1}$$

定义 d 为真滞后，m 为真阶，$\{u(k)\}$，$\{y(k)\}$，$(k=0,1,\cdots N)$ 为输入输出序列，N 为序列长度且 $N>\max(2m+1,m+d+1)$。

令
$$\phi(k)=[y(k-1),\cdots,y(k-m)\ \vdots\ u(k-d),\cdots,u(k-d-m)],$$
$$\theta=[a_1,\cdots,a_m\ \vdots\ b_0,\cdots,b_m]^T.$$

引入观察误差：
$$y(k)=\phi(k)\cdot\theta+e(k). \tag{2}$$

---

*本课题得到中国科学院科学基金资助。

本文于1984年4月18日收到，1984年12月29日收到修改稿。

极小化
$$V=\sum_{k=0}^{N}e^2(k). \tag{3}$$

设
$$Y^T=[y(0),\cdots y(N)], \tag{4}$$

$$\phi^T=[\phi^T(0),\cdots,\phi^T(N)], \tag{5}$$

则参数的最小二乘估计为

$$\hat{\theta}=(\phi^T\phi)^{-1}\phi^TY.$$

若任意选定模型结构

$$y(k)=\sum_{i=1}^{\hat{m}}a_iy(k-i)+\sum_{i=0}^{\hat{m}}b_iu(k-\hat{d}-i), \tag{6}$$

式中的不变数 $\hat{m}\neq m$， $\hat{d}\neq d$，只要 $N>max(2\hat{m}+1,\ \hat{m}+\hat{d}+1)$条件满足，代入观察序列后，同样会有最小二乘解：

$$\hat{\theta}=(\hat{\phi}^T\hat{\phi})^{-1}\hat{\phi}^TY. \tag{7}$$

（带“^”号者均表示估计值）

定理1　对任意选定的 $\hat{m}$ 与 $\hat{d}$，若

（i）过程的输入为 $u(t)=k\cdot\delta(t)$；

（ii）纯滞后的估计误差 $\Delta d=d-\hat{d}<\hat{m}$，

则 $\gamma=\Delta d$ 的充要条件是

$$|\hat{b}_1|,\cdots,|\hat{b}_\gamma|\ll\sum_{i=1}^{\hat{m}}|\hat{b}_i|\ \text{且}\ |\hat{b}_{\gamma+1}|\gg|\hat{b}_\gamma|.$$

证　必要性：

设
$$\hat{\phi}=[\alpha\ \vdots\ \beta], \tag{8}$$

式中 $\alpha=[\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_{\hat{m}}]$ 表示 $\hat{\phi}$ 中由 $y(k)$ 组成的子块，其中

$$A_i=[\underbrace{0,\cdots,0}_{i-1},y(0),y(1),\cdots,y(N+1-i)]^T. \tag{9}$$

用　$\beta=[\hat{A}_{\hat{m}+1},\ \hat{A}_{\hat{m}+2},\cdots,\ \hat{A}_{2\hat{m}+1}]$ 表示 $\hat{\phi}$ 中由 $u(k)$ 组成的子块，其中

$$\hat{A}_{\hat{m}+i}=\Big[\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{i+\hat{d}+1},\ u(0),\ u(1),\ \cdots,\ u(N-d-i+1)\Big]^T. \tag{10}$$

于是
$$\hat{\phi}^T\hat{\phi}=\begin{bmatrix}\alpha^T\alpha & \alpha^T\beta\\ \hline \beta^T\alpha & \beta^T\beta\end{bmatrix}.$$

其中　$\beta^T\alpha=[f_{ij}]_{(\hat{m}+1)\times\hat{m}}$,

$$f_{ij}=\hat{A}^T_{\hat{m}+i}\hat{A}_j=\sum_{k=0}^{N}y(k-i+1)u(k-\hat{d}-j+1),\tag{11}$$

$$\beta^T\beta=[g_{ij}]_{(\hat{m}+1)\times(\hat{m}+1)},$$

$$g_{ij}=\sum_{k=0}^{N}u(k-\hat{d}-j+1)u(k-\hat{d}-i+1).\tag{12}$$

而　$\hat{\phi}^TY=\begin{bmatrix}\alpha^TY\\ \hline \beta^TY\end{bmatrix}$.

其中　$\beta^TY=[h_i]_{(\hat{m}+1)\times 1}$,

$$h_i=\sum_{k=0}^{N}u(k-\hat{d}-i+1)y(k).$$

当输入为　$\{u(k)\}=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$，考虑到纯滞后的定义，

$$\{y(k)\}=\begin{cases}0 & k<d\\ \text{非 }0 & k=d\\ \text{任意} & k>d\end{cases}.$$

由（11），当 $1\le i\le\Delta d$ 时，$f_{ij}=\sum_{k=0}^{N}u(k-\hat{d}-j+1)y(k-i+1)=0.$　（14）

由（12），
$$g_{ij}=\sum_{k=0}^{N}u(k-\hat{d}-i+1)\,u(k-\hat{d}-j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}.\tag{15}$$

由（13），
$$h_i=\sum_{k=0}^{N}u(k-\hat{d}-i+1)y(k)=\begin{cases}0 & 1\le i\le\Delta d\\ y(i) & i>\Delta d\end{cases}.\tag{16}$$

用 $[\hat{\phi}^TY]$ 替代 $[\hat{\phi}^T\ \hat{\phi}]$ 的第 $m+i$ 列，对于 $\hat{m}+1\le i\le\hat{m}+\Delta d$，替代后 $[\hat{\phi}^T\hat{\phi}]$ 的第 $\hat{m}+i$ 行元素全为 0。

若用 D 表示〔$\hat{\phi}^T\ \hat{\phi}$〕相对应的行列式，$D_{\hat{m}+i}$ 表示在〔$\hat{\phi}^T Y$〕替代后相对应的行列式，由于 $D_{\hat{m}+i}=0$（$D\neq 0$），根据cramer法则，

$$\hat{b}_{i-1}=\frac{D_{\hat{m}+i}}{D}=0,$$

纵然考虑计算过程中的舍入误差，但也必存在 $\gamma=\Delta d$，使 $|\hat{b}_1|,\cdots,|\hat{b}_\gamma|\ll\sum_{i=1}^{\hat{m}}|\hat{b}_i|$ 且 $|\hat{b}_{\gamma+1}|\gg|\hat{b}_\gamma|$。

充分性：对于任意选定的 $\hat{m}<m$ 及 $\hat{d}<d$，利用观察序列估计出来的参数，必有：

$$|\hat{b}_1|,\cdots,|\hat{b}_\gamma|\ll\sum_{i=1}^{\hat{m}}|\hat{b}_i|,\ \text{且}\ |\hat{b}_{\gamma+1}|\gg|\hat{b}_\gamma|.$$

略去 $b_i(i=1,\cdots,\gamma)$ 项，则系统模型结构为下列形式：

$$y(k)=\sum_{i=1}^{\hat{m}}\hat{a}_i y(k-i)+\sum_{i=0}^{\hat{m}}\hat{b}_i u(k-(\hat{d}+\gamma)-i).$$

并有
$$y(k-\Delta m)=\sum_{i=1}^{\hat{m}}\hat{a}_i y(k-i-\Delta m)+\sum_{i=0}^{\hat{m}}\hat{b}_i u(k-(\hat{d}+\gamma)-i-\Delta m).$$

其中 $\Delta m=m-\hat{m}$。两式相加得：

$$y(k)=\sum_{i=1}^{m}a_i y(k-i)+\sum_{i=0}^{m}b_i u(k-(\hat{d}+\gamma)-i).$$

由定义知系统的纯滞后为 $\hat{d}+\gamma=d$，

$$\therefore\quad d-\hat{d}=\Delta d=\gamma.$$

证毕

在上述证明中，Δd 的范围没有加以限制，因此上述结论适用于 $\Delta d<N$ 的所有情况，只是由于（2）式仅可能有 $\hat{m}+1$ 个解，所以当 $\Delta d>\hat{m}+1$ 时，情况与 $\Delta d=\hat{m}+1$ 相同，即 B 参数全为0；于是便有

定理2　若（i）过程的输入 $u(t)=k\cdot\delta(t)$；

（ii）$\Delta d=d-\hat{d}\geq\hat{m}$，

$\gamma=\hat{m}$ 的充要条件是

$$|\hat{b}_{1}|,\cdots,|\hat{b}_{\gamma}|\approx 0\text{。（证明从略）}$$

定理 3　输入为阶跃信号，对任意选定的 $\hat{m}$ 与 $\hat{d}$，若（i）$u(t)=k\cdot 1(t)$，

$$\text{（ii）}\Delta d=d-\hat{d}\leq\hat{m}\text{。}$$

则 $\gamma=\Delta d$ 的充要条件是

$$|\hat{b}_{1}|,\cdots,|\hat{b}_{\gamma}|\ll\sum_{i=1}^{\hat{m}}|\hat{b}_{i}|\text{。且}|\hat{b}_{\gamma+1}|\gg|\hat{b}_{\gamma}|\text{。}$$

证　必要性：

由于
$$\{u(k)\}=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases},$$

根据纯滞后的定义，由（11）式得：

$$f_{ij}=\sum_{k=0}^{N}u(k-\hat{d}-j+1)y(k-i+1)=\sum_{k=d}^{N}y(k)\text{。}\qquad 1\leq i\leq\Delta d+1 \tag{17}$$

可见〔$\beta^{T}\alpha$〕子块的第 1 行至 $\Delta d+1$ 行对应元素相同。

据（12）
$$g_{ij}=\sum_{k=0}^{N}u(k-\hat{d}-i+1)u(k-\hat{d}-j+1)=\begin{cases}N-\hat{d}-i+1 & j\leq i\\ N-\hat{d}-j+1 & j>i\end{cases}\text{。} \tag{18}$$

可见〔$\beta^{T}\beta$〕子块主对角线下三角部分同行元素相同，而上三角部分同列元素相同。

据（13）

$$h_{i}=\sum_{k=0}^{N}u(k-\hat{d}-i+1)y(k)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=\hat{d}+\Delta d}^{N}y(k) & i\leq\Delta d+1\\ \displaystyle\sum_{k=i+\hat{d}}^{N}y(k) & i>\Delta d+1\end{cases}\text{。} \tag{19}$$

可见〔$\beta^{T}Y$〕子块的第 1 行至第 $\Delta d+1$ 行元素相同。

i）　$\Delta d=1$

由（17）得：　$f_{\hat{m}+1,j}=f_{\hat{m}+2,j}$，　$(j=1,\cdots,\hat{m})$　（20）

由（18）得：　$g_{\hat{m}+1,j}=g_{\hat{m}+2,j}$，　$(j=2,\cdots,\hat{m}+1)$　（21）

由（19）得：$h_{\hat{m}+1}=h_{\hat{m}}+2$．　　（22）

用〔$\hat{\phi}^TY$〕替代〔$\hat{\phi}^T\hat{\phi}$〕的 $\hat{m}+1$ 列元素，$D_{\hat{m}+1}=0$；故

$$\hat{b}_0=\frac{D_{\hat{m}+1}}{D}=0.$$

ii）　$1<i\leq \Delta d\leq m$

由（17）得：$f_{i-1,j}=f_{i,j}=f_{i+1,j}\quad (j=1,\cdots,m)$，　　（23）

由（18）得：$g_{i-1,j}=g_{i,j}=g_{i+1,j}\quad (j=i+1,\cdots,m+1)$。　　（24）

将〔$\hat{\phi}^T\hat{\phi}$〕的第 $\hat{m}+i$ 列用〔$\hat{\phi}^TY$〕替代后

$$g_{i-1,i}=g_{i,i}=g_{i+1,i}. \tag{25}$$

又据（18）

$$\begin{cases} g_{i-1,j}=N-\hat{d}-(i+1)+1=N-\hat{d}-i+2, \\ g_{i,j}=N-\hat{d}-i+1, \\ g_{i+1,j}=N-\hat{d}-i. \qquad (j=1,\cdots,i-1) \end{cases} \tag{26}$$

用 P 表示〔$\hat{\phi}^T\hat{\phi}$〕的 $\hat{m}+i$ 列被〔$\hat{\phi}^TY$〕替代后的矩阵，则：$P=[P_1,P_2,\cdots,P_{2\hat{m}}]^T$ 中的 $P_{\hat{m}+i-1}$，$P_{\hat{m}+i}$，$P_{\hat{m}+i+1}$，3 行之间具有下列关系：

$$\frac{1}{2}P_{\hat{m}+i-1}-P_{\hat{m}+i}+\frac{1}{2}P_{\hat{m}+i+1}=0. \tag{27}$$

即$P=[D_{\hat{m}+i}]$不满秩，所以　$D_{\hat{m}+i}=0$

$$\hat{b}_{i-1}=\frac{D_{\hat{m}+i}}{D}=0.$$

纵然考虑计算过程中的舍入误差，但也必存在$\gamma=\Delta d$，使得

$$|\hat{b}_1|,\cdots,|\hat{b}_\gamma|\ll\sum_{i=1}^{\hat{m}}|\hat{b}_i|，且|\hat{b}_{\gamma+1}|\gg|\hat{b}_\gamma|.$$

充分性证明与定理 1 同。

iii）　$\Delta d=\hat{m}+1$

由于〔$D_{2\hat{m}+1}$〕中只有 $2\hat{m}$，$2\hat{m}+1$，而无 $2\hat{m}+2$ 行，（27）式不成立，P_1，$\cdots$，$P_{2\hat{m}+1}$线性无关；所以

$$b_{\hat{m}} = \frac{D_{2\hat{m}+1}}{D} \neq 0.$$

iV） $\Delta d > \hat{m}+1$，情况与 $\Delta d = \hat{m}+1$ 同。于是有

定理4 对任意的 $\hat{m}$ 与 $\hat{d}$，若

$$(\text{i})\ d(t) = k\cdot 1(t);\quad (\text{ii})\ \Delta d = d - \hat{d} > \hat{m} \mid.$$

$\gamma = \hat{m} - 1$ 的充要条件是 $|\hat{b}_1|, \cdots, |\hat{b}_\gamma| \ll |\hat{b}_{\hat{m}}|$。

三、步 骤

根据定理，可设计辨识纯滞后步骤如下：

1. 选取一个阶的估计值 $\hat{m}$；

2. 令滞后估计初值 $\hat{d} = 0$；

3. 用直接最小二乘法求出系数的估计值，确定 B 参数中满足充要条件元素的个数 Δd；

4. 判断 $\Delta d = 0$？如是到第六步，否则到第五步；

5. 令 $\hat{d} = \Delta d + \hat{d}$，回到第三步；

6. 打印 $\hat{d}$，这时的 $\hat{d}$ 值即系统的真滞后；

7. 若已知模型的真阶 m，可将 $\hat{m}$ 换成 m，回到第三步求系数。

四、仿 真 与 结 论

这种算法具有以下特点：

1. 适用于高阶系统

例1 系统差分方程为：

$$\begin{aligned} y_k = {} & 0.9y_{k-1} - 0.21y_{k-2} + 0.015y_{k-3} + 0.5y_{k-4} + 3y_{k-5} \\ & - 2.1y_{k-6} + 3.5y_{k-7} + 2.3y_{k-8} + 4y_{k-9} + y_{k-10} + 1.2u_{k-7} \\ & + 4.3u_{k-8} + 0.5u_{k-9} + 0.2u_{k-10} + 1.5u_{k-11} + 0.3u_{k-12} \\ & + 0.8u_{k-13} + 1.1u_{k-14} + 0.4u_{k-15} + 2.3u_{k-16}. \end{aligned}$$

这是一个 $m = 10$，$d = 6$ 的延时过程，计算机仿真的结果见表。

上例说明，本算法对 $\hat{m}$ 的选取不受任何限制。因此，对高阶系统均可降阶求解。

2. 适用于大滞后的系统

例2 一个阶为4，纯滞后为50的系统，它的差分方程为

$$\begin{aligned} y_{k+1} = {} & 1.6y_k - 0.84y_{k-1} + 0.3y_{k-2} - 0.0105y_{k-3} + 0.6u_{k-50} \\ & - u_{k-51} - 2u_{k-52} + 0.5u_{k-53} + 3u_{k-54}. \end{aligned}$$

$\hat{\alpha}$ \ $\hat{m}$ 打印次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
2	2	4	6	6	6					
3	3	6								
4	4									
5	5									
6	6									
最终结果	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

选 $\hat{d}=0$， $\hat{m}=2$，经过25次搜索，每次求得的 B 参数中均有2个元素满足充要条件，最后所得的 $\hat{d}=50$。

3．占有内存小，运算速度快。

这显然是降阶所带来的好处．在一个阶为3，纯滞后为5的系统中，我们分别选 $\hat{m}=2$，与 $\hat{m}=8$（B 参数提取法）进行了对比，结果是前者只花了1′08″，后者则用了6′32″。

参 考 文 献

〔1〕 Isermann, R., Automatica, Practical Aspects of Process Ldentification, Vol. **16** (1980), 575—587.

〔2〕 Isermann, R., U. Baur, W. Bamberger, P. Kneppo and H. Siebert, Automatica, Comparison of Six Online Ldentification and Parameter Estimation Methods, Vol. **10** (1974), 81—103.

AN ORDER REDUCTION SEARCH ALGORITHM FOR DEAD TIME OF DELAY PROCESS

Tan Heliang
(Hunan Univesity, Chang Sha)

Xu Dongling
(Shenyang Automatic Institute)

Abstract

In this papar it is discussed that the relation between the dead time and least squares estimate of parameter of the model with non-true order and non-true dead time in case of special signal. on this basis a new method of identification of dead time-an order reduction Search algorithm-is presented.