第3卷 第1期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No.1
1986年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1986

广义动态系统

王朝珠　戴立意

（中国科学院系统科学研究所）

摘　要

本文介绍了广义系统的物理背景和目前研究状况，并提出了几个急需解决的问题，以期引起注意.

广义系统的研究，始于 H.H.Rosenbrock[1]，他是在讨论复杂的电网络系统中提出该问题的。后来，D. G. Luenberger.[2]发现经济中有些问题属此范畴，他称为描述变量系统. 1978年后，研究不断深入，表现为有意义的工作大量涌现. 据几种主要中外杂志不完全统计，有关文献有上百篇之多，且有越来越活跃的趋势. 因此有必要对广义动态系统予以介绍，以期引起注意. 限于笔者水平和篇幅，只能讨论几个主要问题. 幸运的是所附文献可提供对某些问题的详细了解.

一、广义系统的物理背景

随着现代控制理论应用于工程系统的深入和向其它学科如生态、人口、能源、经济和社会管理系统的渗透，出现了所谓大规模系统. 一般说大规模系统都含有若干子系统，每个子系统都有自己的动态特性，诸子系统之间又存在着非常复杂的联系与制约，通常可归结为如下系统：

$$E\dot{x}=f(x,u,t),\qquad y=g(x,u,t),\tag{1.1}$$

这里 $x\in R^n$ 是状态；$u\in R^r$ 是控制；$y\in R^m$ 是输出. f,g 是 x,u,t 的矢值函数. $E\in R^{n\times n}$ 可能是奇异阵. 当 f,g 是 x,u,t 的线性函数又不显依赖时间 t 且 $\mathrm{rank}E<n$ 时，(1.1) 变为广义线性定常系统

$$E\dot{x}=Ax+Bu,\qquad y=Cx,\tag{1.2}$$

其中 A,B,C 都是适当维数常阵. 为了说明问题，下面举两个方面的例子.

本文于1985年6月23日收到。

例 1 据经济的需求平衡原理，已知多部门的一步延滞的里昂捷夫动态投入产出模型为

$$\mathrm{x}(k)=A\mathrm{x}(k)+B(\mathrm{x}(k+1)-\mathrm{x}(k))+d(k), \tag{1.3}$$

其中 $A=\{a_{ij}\}$ 为投入产出矩阵，$B=\{b_{ij}\}$ 是投资系数阵，$\mathrm{x}(k)\in\mathbf{R}^n$ 是 k 时刻的产量，$d(k)$ 是（不包含积累）k 时刻的最终产品量，b_{ij} 表示第 j 部门每增加单位产量第 i 个部门的投资．由于在多部门的经济系统中，某一部门的增产并不需其它所有部门的投资，另外从实际经济系统出发，能够向其它部门提供投资的部门也是少数，因此在 B 中除少数行具有非负元外，其它皆为零，从而知 B 是降秩阵．系统（1.3）是典型的广义离散系统．对具体经济系统 n 往往达上百甚至上千．

例 2 含管理在内的石油催化、裂化过程是非常复杂的．据美国 profimatics 公司称，它已实现了这一过程的建模和控制，且成为 profimatics 公司专利，被世界上不少有关公司采用．其简化模型为

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{x}}_1&=A_{11}\mathrm{x}_1+A_{12}\mathrm{x}_2+B_1\mathrm{u}+F_1\mathbf{f},\\ O&=A_{21}\mathrm{x}_1+A_{22}\mathrm{x}_2+B_2\mathrm{u}+F_2\mathbf{f},\end{aligned} \tag{1.4}$$

其中 $\mathrm{x}_1\in\mathbf{R}^{n_1}$ 被调节量，如再生温度、滑阀位置、鼓风机能力等；$\mathrm{x}_2\in\mathbf{R}^{n_2}$，它是由影响过程、企业效益和反映企业管理政策的一些量组成的 n_2 维矢量，如压力、油浆回收率、重油回收率等．$\mathrm{u}\in\mathbf{R}^r$ 是调节量；$\mathbf{f}$ 是外干扰．（1.4）是典型的广义连续系统[1]．在这个例子中 n_1 约为 2 或 3，而 $n_2>>n_1$．

上述两方面例子说明，尽管对象的描述仍是线性的，但不是正常系统，而是广义系统．由于（1.3）可通过初等变换化成（1.4）的离散化形式．它们除了维数高之共同特点外，还有一个层次问题．即，一层是对象的动态特性（由微(差)分方程描述）；另一层是管理特征（由代数方程描述）．因此“广义系统”理论也许是处理那些具有多级、多目标、多维数和多层次的大规模复杂系统的一个恰当工具．在这个意义上讲，现实世界已为广义系统的研究提供了深刻的物理背景和广泛的应用前景．

二、广义系统所研究的几个主要方面

十多年来，广义系统研究主要集中在广义线性定常系统．除少数人涉及广义离散线性系统外，大都讨论广义连续线性定常系统．本文主要介绍广义连续线性定常系统．为了书写简化，除特别需要外，一般都将“连续线性定常”略去，而称广义系统．

（一）广义系统的一般解

给定广义系统

$$\begin{aligned}E\dot{\mathrm{x}}&=A\mathrm{x}+B\mathrm{u},\\ \mathrm{y}&=C\mathrm{x}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

当 rank $E=n$ 时，（2.1）是正常线性系统．只要 $\mathrm{u}\in C$（或 C_P），对任给初始条件 x_0，

(2.1)都有唯一解. 这里 C (C_p) 表示连续(或分段连续)矢值函数集合. 当 rank$E<n$ 时(2.1)的解不仅依赖 u, 而且还依赖 u 的有关导数(见后). 因此, 在讨论广义系统(2.1)的解时, 总是假定 $\mathrm{u}(t)$ 是充分连续(分段连续)可微的

利用矩阵束理论(或 Drazin 逆)知道, 当系统(2.1)正则时, 即 $\det(sE-A)\not\equiv 0$ (简记 (E, A) 正则), 其解存在唯一.

引理 1[3] (E, A) 正则的充要条件是存在满秩阵 Q, P 使

$$QEP=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \qquad QAP=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

其中 $A_1\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$, $N\in\mathbf{R}^{n_2\times n_2}$, $n=n_1+n_2$, N 是幂零阵.

如果记

$$\mathrm{x}=P\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{bmatrix}, \qquad QB=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \ CP=[C_1, C_2], \tag{2.3}$$

则称(2.1)受限制等价于

$$\dot{\mathrm{x}}_1=A_1\mathrm{x}_1+B_1\mathrm{u}, \tag*{(2.4)$_1$}$$

$$N\dot{\mathrm{x}}_2=\mathrm{x}_2+B_2\mathrm{u}, \tag*{(2.4)$_2$}$$

$$\mathrm{y}=c_1\mathrm{x}_1+c_2\mathrm{x}_2. \tag*{(2.4)$_3$}$$

并称(2.4)为广义系统(2.1)的标准分解. (2.4)$_1$ 称为慢子系统, (2.4)$_2$ 称为快子系统, 它们通过控制耦合起来.

在分布解的意义下, 通过标准分解(2.4)易知(2.1)的解为[4]. (2.1)

$$\mathrm{x}(t)=P\begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}\left\{e^{A_1t}\mathrm{x}_{10}+\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1\mathrm{u}(\tau)d\tau\right\}$$

$$-P\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix}\left\{\sum_{i=0}^{k-2}N^{i+1}\delta_{(t)}^{(i)}\mathrm{x}_{20}+\sum_{i=0}^{k-1}N^iB_2\mathrm{u}_{(t)}^{(i)}\right\}, \tag{2.5}$$

其中 $\delta_{(t)}^{(i)}$ 表示脉冲的第 i 阶导数. $k=\mathrm{Ind}N$ 是 N 的幂零指数. P, A_1, B_1, N 由(2.2)、(2.3)给出.

从标准分解(2.4)不难知道, 广义系统和正常系统有如下本质区别.

(1)系统的极点. 由于广义系统(2.1)的特征方程为 $\det(sE-A)=0$, 当 rank$E<n$ 时, 从标准分解(2.4)易知. $\deg\{\det(sE-A)\}=n_1<n$, 这里 $\deg\{\cdot\}$ 表示多项式次数, 因此, 广义系统(2.1)除有 n_1 个有限极点外(对应(2.4)$_1$), 还有正常线性系统不具有的 n_2 个无穷远极点(对应(2.4)$_2$), 通常称 $\sigma(E,A)\triangleq\{s|\det(sE-A)=0\}$ 为广义系统(2.1)的有限极点集.

(2)解的结构. (2.5)表明广义系统的解中不仅含正常线性系统所具有的指数解

（对应有限极点简称指数模），而且还含有正常线性系统解中不出现的脉冲和与控制导数（除控制本身）有关项（对应无穷极点，简称脉冲模. 虽然广义系统（2.1）有 $n-n_1$ 个脉冲模，然而独立的只有 $\operatorname{rank} E-n_1$ 个）. 显然，当 $k=1$，即 $N=0$，也就是说无穷极点都是单重时，解中既不含脉冲，又不含控制的导数项. 足见解中脉冲和与控制导数有关项主要反映无穷极点的多重性. 由于解依赖控制导数，因此，欲确定解 $\mathrm{x}(t)$ 不仅需要直到 t 时刻系统的信息，还需要 t 以后系统的信息. 因而，广义系统（2.1）不具有传统的因果性.

（3）传递函数阵. 已知正则广义系统（2.1）的传递阵为 $G(s)\triangleq C(sE-A)^{-1}B$. 由于 $\operatorname{rank} E<n$，因此 $G(s)$ 不再像正常线性定常系统那样是真有理分式阵. 这表明广义系统（2.1）可以反映物理不能实现现象（对应于非传统因果性.）.

（4）系统的结构稳定性. 给定正常系统 $\dot{\mathrm{x}}=A\mathrm{x}$，如果 $\sigma(I,A)\subset C^-$. C^- 表示左半开复平面，则一定存在 δA，使 $\sigma(I,A+\delta A)\subset \mathbf{C}^-$，即正常系统对结构参数 A 总是结构稳定的. 只不过 $\|\delta A\|$ 的大小（裕度）与 A 有关而已. 而广义系统

$$E\dot{\mathrm{x}}=A\mathrm{x} \tag{2.6}$$

就比较麻烦.

定义 1　将 E 和 A 的元按一定次序排成一个空间矢量记为 $p\{E,A\}$. 设 $\sigma(E,A)\subset \mathbf{C}^-$. 如果在 $p\{E,A\}$ 处存在一个邻域 U，当结构参数（E,A）在 U 中变化时，（2.6）总稳定，则称（2.6）在 $p\{E,A\}$ 处是结构稳定的.

引理 2[5]　(i)广义系统（2.1）在 $p\{A\}$ 处结构稳定的充要条件是

$$\deg\{\det(sE-A)\}=\operatorname{rank} E.$$

(ii)广义系统（2.1）在 $p\{E.A\}$ 处结构稳定的充要条件是 $\operatorname{rank} E=n$.

引理 2 表明在结构参数（特别是 E）任意扰动下广义系统（2.6）是不具有结构稳定性的.

（二）广义系统（2.1）的能控性，能观性

能控性，能观性仍是广义系统的基本概念. 由于可以从不同侧面反映广义系统和正常系统的区别，因而有各种能控（观）定义. 如极点能控[6]. C—能控、能观[7]，R—能控、能观[7]，强能控、强能观[8]，D_i—能控、能观[9]. 为了突出反映广义系统的特点，兹介绍如下三种能控定义.

定义 2　[10]广义系统（2.1）称为能控的是指对每个 $t_1>0$. $\mathrm{x}_{10}\in \mathbf{R}^{n_1}$，$\mathrm{w}\in \mathbf{R}^n$，总存在 $\mathrm{u}(t)\in C_P^{k-1}$，使 $\mathrm{x}(t_1)=\mathbf{W}$. C_P^{k-1} 表 $k-1$ 次分段连续可微矢值函数集合.

称　$R(\mathrm{x}_{10})=\{\mathrm{w}\,|$存在，$t_1>0,\mathrm{u}(t)\in C_P^{k-1}$ 使 $t=0$ 从 x_{10} 出发（2.1）的解 $\mathrm{x}(t)$ 满足 $\mathrm{x}(t_1)=\mathrm{w}\}$　（2.7）

为 x_{10} 的能达集. 而系统（2.1）的能达集定义为

$$R=\bigcup_{\mathrm{x}_{10}\in \mathbf{R}^{n_1}} R(\mathrm{x}_{10}). \tag{2.8}$$

定义3[10] 如果系统(2.1)在其能达集R中是能控的.(即可选到$u(t)\in C_p^{h-1}$,使系统(2.1)能把能达集R中任一固定点引导到能达集中的任一点)则称广义系统(2.1)是R—能控的.

定义4[8] 在零初始条件下,用非脉冲输入($u\in C_p^{h-1}$)能激励出来的系统(2.1)的脉冲模,称作能控脉冲模.如果(2.1)的所有脉冲模都是能控的,则称广义系统(2.1)是脉冲能控的.

关于上述三种能控性有如下判据:

定理1[10] (i)广义系统(2.1)能控的充要条件是

$$\mathrm{rank}[sE-A,\ B]=n,\ \forall\ \ s\in\mathbf{C},\ s\ \text{有限}$$

且

$$\mathrm{rank}(E,B)=n;$$

(ii)广义系统(2.1)R—能控的充要条件是

$$\mathrm{rank}[jE-A,\ B]=n,\ \forall\ \ s\in\mathbf{C},\ s\ \text{有限};$$

(iii)广义系统(2.1)脉冲能控的充要条件是存在$K\in\mathbf{R}^{r\times n}$使

$$\deg\{\det(sE-A-BK)\}=\mathrm{rank}E.$$

[10]给出三种能观定义,其判据条件与定理1对偶.

值得指出的是在[8]中作者把Ex作为状态.从广义系统(2.1)的系统矩阵出发,引进了"强等价变换".在此基础上定义了强能控、强能观.可以指出它们和上述三种能控(观)定义有如下关系:广义系统(2.1)强能控(观)的充要条件是广义系统(2.1)为R—能控(观)且脉冲能控(观).除此之外,目前广义系统(2.1)所涉及到的能控(观)定义都可从上述三种能控(观)定义引伸出来.

(三)广义系统(2.1)的反馈和极点配置

对标准分解中(A_1,B_1)(N, B_2)再作能控性分解,易知广义系统(2.1)受限制等价于[11]

$$\begin{cases}\dot{x}_{11}=A_{11}x_{11}+A_{12}x_{12}+B_{11}u,\\ \dot{x}_{12}=A_{22}x_{12},\\ N_{11}\dot{x}_{21}+N_{12}\dot{x}_{22}=x_{21}+B_{21}u,\\ \qquad N_{22}\dot{x}_{22}=x_{22},\\ y=C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+C_{21}x_{21}+C_{22}x_{22},\end{cases}\tag{2.9}$$

其中(A_{11}, B_{11}),(N_{11}, B_{21})为能控对,N_{11}, N_{22}为幂零阵.(2.9)称为广义系统(2.1)的标准能控分解.

众所周知,反馈是控制理论中的一个基本观念.状态和输出反馈是最早引进广义系统中来的.它们通常又和极点配置密切相关.

所谓广义系统（2.1）的状态反馈和极点配置问题是指在状态反馈

$$u = Kx \tag{2.10}$$

下讨论闭环系统

$$E\dot{x} = (A+BK)x$$

的极点分布.

〔6〕用几何方法最早讨论了这个问题，后有人用矩阵方法讨论它．主要结果：

定理 2[11] 给定广义系统（2.1）

(i)对任意形如（2.10）的状态反馈，闭环系统至少有 $n-\operatorname{rank} E$ 个无穷极点；

(ii)存在 $K\in R^{r\times n}$ 使闭环系统只有 $n-\operatorname{rank} E$ 个无穷极点的充要条件是能控标准分解（2.9）中. $N_{22}=0$ $\operatorname{rank}(N_{11},\ N_{12})=\operatorname{rank} N_{11}$，或$N_{22}$不存在.

(iii)存在 $K\in R^{r\times n}$ 使闭环的 $\operatorname{rank} E$ 个有限极点可任意配置的充要条件是广义系统（2.1）为 R—能控且标准能控分解（2.9）中 $N_{22}=0, \operatorname{rank}(N_{11}, N_{12})=\operatorname{rank} N_{11}$，或 N_{22} 不存在.

注 标准能控分解（2.9）中 $N_{22}=0, \operatorname{rank}(N_{11},\ N_{12})=\operatorname{rank} N_{11}$，或 N_{22} 不存在，是广义系统（2.1）脉冲能控的等价叙述．关于能稳也有相应结果.

定理 2 的(iii)表明状态反馈最多能任意配置 $\operatorname{rank} E$ 个有限极点，仍有 $n-\operatorname{rank} E$ 个无穷极点．这是状态反馈的局限性．为了获得广义系统（2.1）的所有 n 个极点的任意配置，并注意到广义系统结构稳定性的特点，必须引进状态导数反馈．考虑如下控制

$$u = K_1x - K_2\dot{x}, \tag{2.11}$$

闭环系统为

$$(E+BK_2)\dot{x} = (A+BK)x. \tag{2.12}$$

从（2.12)易知，如果存在 $K_2\in R^{r\times n}$ 使 $\det(E+BK_2)\neq 0$，这样的反馈控制（2.11）使闭环变为正常系统，因而改变了系统（2.1）的“广义”性.

定义 5[11] 如果存在 $K_2\in R^{r\times n}$ 使 $\det(E+BK)\neq 0$，则称广义系统（2.1）是能正常化的.

从定义 5 直接得如下引理

引理 3[11] 广义系统（2.1）能正常化的充要条件为

$$\operatorname{rank}(E,\ B)=n.$$

利用能正常化概念和能控标准分解可得

定理 3 给定由复平面上任意 n 个点组成的对称集合$\wedge$（对称指复数共轭成双）存在（2.11）使

$$\sigma(E+BK_2,\ A+BK_1)=\wedge$$

的充要条件是广义系统（2.1）能控.

定理 3 表明，如果广义系统（2.1）是能控的，一定存在控制（2.11）把（2.1）的

所有极点（有限和无穷）都能移到复平面的任意指定位置上，这是纯状态反馈无法做到的.

输出和输出导数反馈是一种特殊的状态和状态导数反馈，它的极点配置也有相应结果[12].

利用状态（输出）反馈不但可以讨论极点配置问题，而且可以讨论系统解耦和抗外干扰[22]等问题，它们都属于广义系统（2.1）的静态补偿器设计.

（四）广义系统（2.1）的动态补偿器

在控制系统设计中，由于静态反馈的局限性，为了获得满意的系统品质，往往采用动态补偿器. 广义系统也不例外. 虽然国外曾有人注意到它，但至今未见公开发表结果. 〔13〕首先为广义系统（2.1）设计了广义状态观测器[13]

$$E\dot{x}_c=(A-GC)x_c+B_cu+Gy \tag{2.13}$$

和广义动态补偿器[13]

$$\begin{aligned}E_c\dot{x}_c&=A_cx_c+B_cy,\\ u&=F_cx_c+Fy.\end{aligned} \tag{2.14}$$

且给出了广义动态补偿器（2.14）存在的充要条件. 在此基础上讨论了带有有模型外干扰的输出调节问题，得到了相应形式的广义系统的“内模原理”.

形式上（2.13）和（2.14）仅依赖输出 y，然而从（2.5）知道，它们除依赖 y 外，还依赖 $y^{(1)}$，$y^{(2)}\cdots y^{(k-1)}$，当 $k>1$时，（2.13）和（2.14）的物理实现是困难的. 为此，有必要考虑广义系统（2.1）的正常状态观测器和正常动态补偿器.

定义 6 给定广义系统（2.1），如果存在 $K\in\mathbf{R}^{r\times n}$ 使

$$\sigma(E,\ A+BK)\subset\mathbf{C}^-,$$

则称广义系统（2.1）是能稳的.

利用对偶性可定义广义系统（2.1）的能检测性.

利用能正常化概念,〔14〕讨论了系统（2.1）的广义状态观测器的结构. 结果表明：一般广义系统（2.1）不存在全（n）阶正常状态观测器. 在某些条件下却存在着降（小于 n）阶正常状态观测器.

定理 4[11] 设广义系统（2.1）是能检测的.

(i)如果（E^T，A^T，C^T）能正常化，且 $\operatorname{rank}C=m$，则一定存在 $n-m$ 阶正常状态观测器（$\lim\limits_{t\to\infty}(x-w)=0$）

$$\begin{aligned}\dot{x}_c&=A_cx_c+B_cy+Gy,\\ w&=F_cx_c+F_cy.\end{aligned}$$

(ii)如果系统（2.1）是脉冲能控的，则一定存在维数不大于 $\operatorname{rank}E$ 的正常状态观

测器（$\lim\limits_{t\to\infty}(\mathrm{x}-\mathrm{w})=0$）

$$\dot{\mathrm{x}}_c=A_c\mathrm{x}_c+B_c\mathrm{u}+G\mathrm{y},$$
$$\mathrm{w}=F_c\mathrm{x}_c+F\mathrm{y}+H\mathrm{u}.$$

该定理的证明是构造性的，证明本身提供了设计方法。

利用能正常化概念，状态反馈和正常状态观测器的结果，〔5,15〕讨论了广义系统（2.1）的正常动态补偿器和结构稳定正常动态补偿器。

定理5[15]　广义系统存在正常动态补偿器

$$\dot{\mathrm{x}}_c=A_c\mathrm{x}_c+B_c\mathrm{y},$$
$$\mathrm{u}=F_c\mathrm{x}_c+F\mathrm{y}. \tag{2.15}$$

使闭环稳定的充要条件是系统（2.1）能稳，能检测。

定理6[5]　(i)在$p\{A,B,C\}$处，（2.15）是（2.1）的结构稳定正常动态补偿器的充要条件为

$$\deg\left\{\det\left[\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & I_{nc}\end{pmatrix}s-\begin{pmatrix}A+BFC & BF_c\\ B_cC & A_c\end{pmatrix}\right]\right\}=n_c+\operatorname{rank}E.$$

(ii)系统（2.1）在$p\{A,B,C\}$处存在结构稳定正常动态补偿器（2.15）的充要条件为系统（2.1）能稳，能检测，脉冲能控，脉冲能观。

从定理6和引理2知道，（2.15）决不能成为广义系统（2.1）在$p\{E,A,B,C\}$处的结构稳定正常动态补偿器。如果$\dot{\mathrm{y}}$可利用，可考虑如下正常动态补偿器[16]

$$\dot{\mathrm{x}}_c=A_c\mathrm{x}_c+B_c\mathrm{y},$$
$$\mathrm{u}=F_c\mathrm{x}_c+F\mathrm{y}+H\dot{\mathrm{y}}. \tag{2.16}$$

定理7[16]　系统（2.1）在$p\{E,A,B,C\}$处存在结构稳定正常动态补偿器（2.16）的充要条件是系统（2.1）是能稳，能检测，且(E,A,B)和(E^T,A^T,C^T)都是能正常化的。

定理7表明，增加量测$\dot{\mathrm{y}}$的设备是获得闭环系统在$p\{E,A,B,C\}$处结构稳定所付出的代价。

有了正常动态补偿器和结构稳定正常动态补偿器后，可以直接讨论带有有模型外干扰的广义系统的输出调节问题，得出了具有能物理实现的动态补偿器的“内模原理”。

（五）广义系统（2.1）的最优控制

本来最优控制也应是广义系统所讨论的一个重要方面，但由于还没有像极大值原理那样的工具，这方面获得彻底解决的唯一结果是广义系统的最优调节问题，其性能指标为

$$J=\int_{0^-}^{\infty}(\mathrm{x}^T(t)Q\mathrm{x}(t)f\mathrm{u}^T(t)R\mathrm{u}(t))dt,$$

其中$Q\geq 0$，$R>0$.

定理8[17] 设系统（2.1）是能稳且脉冲能控的．记$Q=C^TC$．如果(E,A,C)是能检测的，则最优调节有唯一解，且是状态反馈形式，最优闭环系统是渐近稳定的．

为了获得最优反馈增益阵，只需解rank E阶的代数Riccati方程．〔18〕讨论的是$Q>0$，$R>0$，〔17〕推广其结果为定理8．

三、进一步需要研究的几个问题

（1）非线性和线性时变广义控制系统

〔4〕曾对上述问题有过讨论．但由于没有解的表达式，只能从广义系统进行定性分析．其结果不但少而且是局部的．为了对上述问题有所突破，必须先讨论其可解性和解的表达式．当然是件困难事情．

（2）广义系统的最优控制

广义系统是否也存在象极大值原理那样的原理？否则其最优控制如何解决？值得探讨．

（3）线性定常广义系统

（a）建模和辨识．由于线性定常广义系统不具有传统的因果性关系，这样的系统如何建模和辨识呢？

（b）层次结构特征．广义系统（2.1）都可通过初等变换化成（1.4）的形式，如何从层次观点讨论解的结构性呢？若将Leontief方程化成（1.4）的离散形式，它的层次特征和经济涵义是什么呢？

（c）层次解的优化．能否把规划和控制理论结合起来，讨论广义系统（1.4）层次解的优化呢？

上面虽然对广义系统作了介绍，但限于笔者水平，且文献读得不够全面，很可能是挂一漏万，写此拙文，只是抛砖引玉，以期引起对广义系统的注意．

参考文献

〔1〕 Rosenbrock, H. H., Structural properties of linear dynamical systems, Int. J. Control, Vol. 20, (1974), 191-202.

〔2〕 Luenberger, D. G., Singular dynamic Leontief systems, Econometrica, **45**, 4, (1977), 991-995.

〔3〕 甘特马赫尔，矩阵论，柯召译，高等教育出版社，（1955）.

〔4〕 Campbell, S. L., Singular systems of differential equations II, Pitman, (1982).

〔5〕 戴立意，王朝珠，广义系统结构稳定的正常动态补偿器，第五届全国控制理论及其应用学术交流会论文集，上册，（1985），36-40.

〔6〕 Cobb, J. D., Feedback and pole placement in descriptor variable systems, Int. J. Control, **33**, 6, (1981), 1135－1146.

〔7〕 Yip, E. L. and R. F. Sincovec, Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems, IEEE Trans. AC－**26**, 3, (1981), 702－706.

〔8〕 Verghese, G. C., B. C. Levy and T. Kailath, A generalized state－space for singular systems, IEEE Trans. AC－**26**, 4, (1981), 811－831.

〔9〕 Pandolfi, L., Controllability and stabilization for linear systems of algebraic and differential equations, J. of Opti. Theory and Appli., **30**. 4, (1980).

〔10〕 Cobb, J. D., Controllability, observability and duality in singular systems, IEEE Trans. AC－**26**, 12, (1984), 1076－1982.

〔11〕 王朝珠，戴立意，广义系统的状态观测器，第五届全国控制理论及其应用学术交流会论文集，上册，(1985)，31－35。

〔12〕 AL－Nasr, N., V. Lovass－Nagy and G. Rabson, General eigenvalue placement in linear control systems by output feedback, Int. J. Systems Sci., **14**, 5, (1983), 519－528.

〔13〕 王源，广义系统的抗干扰和输出调节，中国科学院系统科学研究所研究生毕业论文，(1984)。

〔14〕 Wang Chaozhu and Dai Liyi, The state observer structure in singular control systems, 已投《应用数学学报》。

〔15〕 戴立意、王朝珠，广义系统的正常动态补偿器，将发表在《数学物理学报》。

〔16〕 Dai Liyi and Wang Chaozhu, Stable and structurally stable regulators for singular systems, 已投《应用数学学报》。

〔17〕 程兆林、张纪锋，广义系统二次指标下的最优调节器问题，第五届全国控制理论及其应用学术交流会论文集，上册，(1985)，74－81。

〔18〕 Cobb, J. D., Descriptor variable systems and optimal state regulation, IEEE Trans. AC－**28**, 5, (1983), 601－611.

〔19〕 Gontian Yan and T. J. Tarn, Strong controllability and strong observability of generalized dynamical systems, In Proc. 20th AACC Control and Computing, Dec., (1982).

〔20〕 EL－Tohami, M., V. Lovass－Nagy and R. Mukundan, On the design of observers for generalized state space systems using singular value decomposition, Int. J. Control, **38**,3,(1983),673－685.

〔21〕 严拱天，广义动力系统的可控性与可观性，控制理论与应用，**2**，2，(1985)，33－44.

〔22〕 Xu Kekang, Realization of disturbance resistance of a generalized state space system by feedback, Preprints, of IFAC 9th World Congress, **8**, (1984), 105－109.

〔23〕 Sincovec, R. F., A. M. Erisman, E. L. Yip and A. Epton, Analysis of descriptor systems using numerical algorithms, IEEE Trans. AC－**26**, 1, (1981), 139－147.

〔24〕 Newcomb, R., The semi－state description of nonlinear time variable circuits, IEEE Trans. CAS－**28**, 1, (1981), 62－71.

〔25〕 Mertzios, B. G., On the sensitivity analysis of linear time－invariant singular systems, IEEE Trans. CAS－**31**, 11, (1984), 978－982.

〔26〕 Mukundan, R. and W. Dayawansa, Feedback control of singular systems－－－－proportional and derivative feedback of the state, Int. J. Systems Sci., **14**, (1983), 615－632.

〔27〕 Yamada, T, and D. G. Luenberger, Generic controllability theorems for descriptor systems, IEEE Trans. AC－**30**, 2,(1985), 144－152.

〔28〕 Lewis, F. L., Descriptor systems: decomposition into forward and backward subsystems, IEEE Trans. AC－**29**, 2, (1984), 167.

SINGULAR DYNAMIC SYSTEMS

Wang Chaozhu, Dai Liyi

(Institute of Systems Science Academia Sinica, Beijing)

Abstraet

In this paper, we have introduced the physical background of singular systems and reviewed the current situation of research about singular systems. On above bases, we bring up some questions which are well worth discussing.