第3卷 第1期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No.1
1986年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1986

线性非定常大系统的稳定性问题

高为炳

（北京航空学院）

摘　要

大系统的理论与应用近十余年来有了相当大的发展，本文研究了这类系统的稳定性问题．首先对非定常线性系统的稳定性给出了一个简单的几何判据，然后建立起大系统的稳定性判据．最后考虑了大系统的结构，从而建立了简化的稳定性判据．

一、前　言

大系统在近十余年来有了很大的发展，在理论上及应用上都取得了不少成果[1-4,6]．大系统的研究课题，目前几乎是与一般控制理论平行的，如稳定性、镇定与控制等等，当然考虑了大系统的特点．此外，关于大系统的结构和降阶等问题也是研究的重点．关于大系统的稳定性有大量的成果．本文研究的是一般线性非定常系统的稳定性问题，这种系统研究的很少，因为即便是普通的非定常线性系统，便于应用的结果也不多．

我们所考虑的大系统为

$$S_i:\ \dot{x}_i = A_{ii}(t)x_i + \sum_{j\neq i}^{n} A_{ij}(t)x_j,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

即大系统可以分解成 n 个子系统 S_i，状态向量 x_i 是 l_i 维的，$\sum_{i=1}^{n} l_i = l$，大系统的状态 $x=[x_1^T,x_2^T,\cdots,x_n^T]^T$ 是 l 维向量．系统（1）可以视为 n 个孤立子系统

$$\hat{S}_i:\ \dot{x}_i = A_{ii}(t)x_i,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

由 $A_{ij}(t)$ 互相联接起来的复杂系统，$A_{ij}(t)x_j$ 是子系统 $\hat{S}_j$ 加给子系统 $\hat{S}_i$ 的作用，$j\neq i$．

非定常线性系统的稳定性，是一个比较困难的问题．因为要求出这种线性微分方程的解一般是不可能的．而且，定常线性系统的一些基本概念，如特征根、特征向量等已

本文于1983年4月1日收到．1985年1月3日收到修改稿．

失去价值，因而对定常系统的一系列稳定性判据，如路斯一古尔维兹判据，各种频域方法，都不再成立了．可以应用的有李亚普诺夫 第二 方 法，以 及 模（范 数）的 估 值方法[5]．

本文用向量和矩阵的范数、矩阵的测度来研究非定常线性大系统(1)的稳定性问题．

二、非定常线性系统的一种稳定性判据

利用时变的矩阵范数和测度的概念，〔5〕中给出了一类非定常线性系统的 稳 定性判据．

下面将用到 $m\times n$ 阵 A 的范数公式：

$$\|A\|_1=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|,\quad \|A\|_2=[\lambda_{\max}(A^*A)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|,$$

以及 $n\times n$ 阵 A 的测度公式：

$$\mu_1(A)=\max_j[\,a_{jj}+\sum_{i\neq j}|a_{ij}|],\quad \mu_2(A)=\tfrac{1}{2}\lambda_{\max}[A^*+A],$$

$$\mu_\infty(A)=\max_i\left[\,a_{ii}+\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right]$$

这里 A^* 记为 A 的转置 共 轭，$\lambda(A)$为 A 的特 征 根，测度的 定 义 为：

$$\mu(A)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\|I+\varepsilon A\|-1}{\varepsilon}.$$

研究线性非定常系统

$$\dot{x}=A(t)x \tag{3}$$

有以下 Coppel 不等式[5]

$$\|x_0\|\exp\int_{t_0}^{t}\mu(-A(\tau))d\tau\ll\|x(t)\|\leq\|x_0\|\exp\int_{t_0}^{t}\mu(A(\tau))d\tau,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示范数，x_0 表示 $x(t_0)$，则有以下定理：

定理 1　若矩阵 $A(t)$的测度当 $t\to\infty$ 时有

$$\int_{t_0}^{t}\mu[A(t)]dt\to-\infty, \tag{4}$$

则线性系统（3）渐近稳定．

系 1　定理 1 的充分条件（4）可代之以更强的条件

$$\mu[A(t)]\le -\varepsilon,\ 当\ t\ge t_0+T, \tag{5}$$

其中 ε 与 T 为任意正数.

对定常线性系统 $\dot{x}=Ax$，有著名的 Gersgorin 定理．这个定理不能推广到定常系统（3）来判定其稳定性，因此即便（3）的特征根 $\lambda(t)$ 有负实部，系统也不一定稳定[6]．

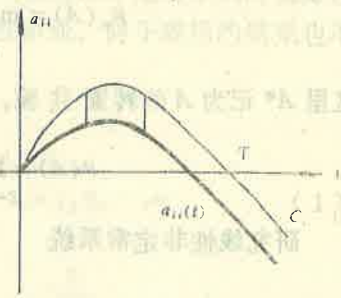
条件（5）可给以几何解释，以建立一个类似于 Gersgorin 作图方法的稳定性判据．作以 $[a_{ii}(t),0]$ 为圆心，$\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$ 或 $\sum\limits_{i=1\ i=j}^{n}|a_{ij}|$ 为半径的圆，称为盖氏圆 Γ_i，有

定理 2　对非定常系统（3），若当 $t\ge t_0+T$（T 为某正数）时，$\Gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均位于虚轴的左方，则系统（3）渐近稳定.

这个判据比较保守，但对于非定常系统这类困难的问题，本方法应用还是十分简便的．定理 2 还可有以下作图表示．在（a_{ii},t）平面上绘出 $a_{ii}(t)$，对任一 t，在 $a_{ii}(t)$ 上作线段长度为 $\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$ 或 $\sum\limits_{i=1\ i\neq j}^{n}|a_{ij}|$，得到曲线 C_i，有

系 2　对系统（3），若当 $t\ge t_0+T$（T 为某正数）时，曲线 C_i（$i=1,2,\cdots,n$）均位于 t 轴的下面，则系统（3）渐近稳定（如图）.

虽然定理 2 的结果比较保守，但在对非定常线性大系统（1）的稳定性判别中它有着独特的优点.



三、非定常线性大系统的稳定性

1．研究大系统（1），按各子系统的状态向量的范数进行集结，得到以下结果：

$$x_i(t+\varepsilon)=x_i(t)+\varepsilon A_{ii}(t)x_i(t)+\varepsilon\cdot\sum_{j=i}A_{ij}(t)x_j(t)+0(\varepsilon),$$

$$\|x_i(t+\varepsilon)\|\le\|I+\varepsilon A_{ii}(t)\|\,\|x_i(t)\|+\varepsilon\cdot\sum_{j\neq i}\|A_{ij}(t)\|\|x_j(t)\|$$

$$\frac{\|x_i(t+\varepsilon)\|-\|x_i(t)\|}{\varepsilon}\le\frac{[\|I+\varepsilon A_{ii}(t)\|-1]}{\varepsilon}\|x_i(t)\|+\sum_{j\neq i}\|A_{ij}(t)\|\|x_j(t)\|$$

$$\frac{d}{dt}\|x_i(t)\| \le \mu(A_{ii}(t))\|x_i(t)\| + \sum_{j\neq i}\|A_{ij}(t)\|\|x_j(t)\|,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

上式中$\frac{d}{dt}$表示右导数$\frac{d^+}{dt}$。

设各孤立子系统是渐近稳定的且满足：存在正数ε，使$\mu(A_{ii}(t))\le-\varepsilon\ (t>t_0)$。

记 $\mu_{ii}(t)=\mu(A_{ii}(t))$、$m_{ij}(t)=\|A_{ij}(t)\|$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$。根据比较原理，微分不等式（6）的解的稳定性由

$$\dot{\gamma}_i=\mu_{ii}(t)\gamma_i+\sum_{j\neq i}m_{ij}(t)\gamma_j,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

的稳定性保证，将（7）写成矩阵形式

$$\dot{\gamma}=B(t)\gamma, \tag{8}$$

其中 $B(t)=[b_{ij}(t)]$，$b_{ii}(t)=\mu_{ii}(t)$，$b_{ij}(t)=m_{ij}(t)$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$。

系统（8）渐近稳定的充分条件是

$$\int_{t_0}^{t}\mu(B(t))dt\to-\infty, \tag{9}$$

因为时变阵的范数及测度的计算是初等的，尽管n可以较大，但上面得到的判定时变大系统稳定性的方法是可行的。

线性系统（8）称为大系统的集结方程。它把大系统的每一个子系统集结起来，用一个标量函数γ_i来代替子系统s_i的l_i维状态向量x_i，这就是大系统理论中的“分解—集结”方法[1]。

2. 研究大系统的一个显著特点是要考虑大系统的结构，如文献[7]中将大系统分解为多层结构。分解方法可以采用图论方法。

大系统S设由n_1个子系统

$$S_i^{(1)}:\quad \dot{x}_i^{(1)}=A_{ii}^{(1)}(t)x_i^{(1)}+\sum_{j\neq i}^{n_1}A_{ij}^{(1)}(t)x_j^{(1)},\quad i=1,2,\cdots,n_1 \tag{10}$$

所组成。经过改变子系统的次序并相应改变下标的命名，可将大系统s的矩阵$A(t)$化为三角阵

$$A(t)=\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)}(t) & & & 0 \\ A_{21}^{(1)}(t) & A_{22}^{(1)}(t) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{n_11}^{(1)}(t) & A_{n_12}^{(1)}(t) & \cdots & A_{n_1n_1}^{(1)}(t)\end{bmatrix}. \tag{11}$$

设 $\|A_{ij}(t)\|<K$(K为正数)，可以证明大系统的稳定性决定于其孤立子系统

$$S_i^{(1)}:\dot{x}_i^{(1)}=A_{ii}^{(1)}(t)x_i^{(1)},\quad i=1,2,\cdots,n_1 \tag{12}$$

的稳定性. 这时大系统是简相联的，孤立子系统 $s_i^{(1)}$ 是强相联的(SCS). 每一个 $S_i^{(1)}$ 又可以分解成最小强相联子系统(MSCS)，它的矩阵可表为

$$A_{ii}^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} A_{11}^{(2)}(t) & & 0 & & A_{1s}^{(2)}(t)\\ A_{21}^{(2)}(t) & A_{22}^{(2)}(t) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & A_{ss-1}^{(2)}(t) & & A_{ss}^{(2)}(t)\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n_2. \tag{13}$$

这一层结构的孤立子系统如果均是大系统(1)的孤立子系统则不能再分了，否则类似于上，还可以再分. 总之，可以将大系统(1)分为多层，最高层是简相联的，而其余各层都是最小强相联的，最低层是简相联的. 这样，大系统(1)的稳定性问题归结为各层的那些MSCS的稳定性问题. 对每一个MSCS，按前面的结果，得到判定其稳定性的集结系统

$$\dot{\gamma}=B(t)\gamma, \tag{14}$$

$$B(t)=\begin{pmatrix} \mu_{11}(t) & & 0 & & m_{1k}(t)\\ m_{21}(t) & \mu_{22}(t) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & m_{k,k-1} & & \mu_{kk}(t)\end{pmatrix},$$

其中 $\mu_{ii}(t)\le-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$，$m_{ij}(t)>0$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,k$. 我们又得到非定常线性系统，不过它已具有相对的低维数和简单的结构. 系统(14)稳定的条件是 $\mu(B(t))\le-\bar{\varepsilon}$ $(\bar{\varepsilon}>0)$.

我们也可以取为

$$\mu_{ii}(t)+m_{i+1,i}(t)\le-\bar{\varepsilon}\qquad i=1,2,\cdots,k,$$

或 $$\mu_{ii}(t)+m_{i,i-1}(t)\le-\bar{\varepsilon}\qquad i=1,2,\cdots,k;$$

约定 $$m_{k+1,k}(t)=m_{1,k}(t),\quad m_{10}(t)=m_{1k}(t).$$

下面以一个由六个子系统组成的大系统为例加以说明.

$$\dot{x}=A(t)x,$$

$$A(t)=\left(\begin{array}{ccc|cc|c}
A_{11} & 0 & A_{13} & & & \\
A_{21} & A_{22} & 0 & & 0 & \\
0 & A_{32} & A_{33} & & & \\
\hline
A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\
A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & 0 \\
\cline{4-6}
0 & A_{62} & 0 & 0 & A_{65} & A_{66}
\end{array}\right).$$

设各孤立子系统均稳定，即

$$\mu(A_{ii}(t))\leq-\gamma_{ii}\quad(\gamma_{ii}>0),\ i=1,2,\cdots,6$$

第三层

$$\begin{bmatrix} A_{44} & A_{46} \\ A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}$$

的稳定性条件为　$\mu_{44}(t)+m_{45}(t)<-\beta_{22}$，$\mu_{55}(t)+m_{54}(t)<-\beta_{22}$，$(\beta_{22}>0)$.

第二层有二个子系统：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}、\begin{bmatrix} -\beta_{22} & \gamma_{12}(t) \\ \gamma_{21}(t) & \mu_{66}(t) \end{bmatrix}$$

的稳定性条件为　$\mu_{11}(t)+m_{13}(t)<-\beta_{11}$，$\mu_{22}(t)+m_{21}(t)<-\beta_{11}$，$\mu_{33}(t)+m_{32}(t)<-\beta_{11}$ 及 $-\beta_{22}+\gamma_{12}(t)<-\varepsilon,\mu_{66}(t)+\gamma_{21}(t)<-\varepsilon$，其中　$\gamma_{12}(t)=\|(A_{46},\ 0)^T\|$，$\gamma_{21}(t)=\|(0,\ A_{65})\|$，$\beta_{11}>0,\varepsilon>0$.

第一层是简相联的（上块三角阵），其稳定性已由对角块的稳定性保证.

从上面的讨论可以看到，由于各层的集结方程维数不高，因此所有计算都是简单的. 实际上，在应用本方法时，只考虑两层（包括一个简相联层）就够了.

四、大系统的分散镇定

对于大系统来说，集中处理数据、信息有一些缺点，例如，系统的子系统可能位置上分离较远，传送信息有较大的困难；又如，虽然原则上信息越多可能作出较好的决策，但实际上由于计算方法上的困难，并不一定能得到好的决策（象反馈阵等），事实上远非所有信息对某一子系统的行为都是同等重要的. 还有计算和分析上的困难. 基于这些情况，局部分散控制具有很大的理论与实际意义. 所谓局部分散控制[1,4]指的每个子是，系统的控制仅采用该子系统的状态信息.

局部分散控制系统的模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}(t)x_i + \sum\limits_{j\neq i}^{n} A_{ij}(t)x_j + B_j(t)u_i, \\ y_i = C_i x_i, \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

其中 控制向量 $u_i \in \mathrm{R}^{m_i}$，输出向量 $y_i \in \mathrm{R}^{q_i}$。

分散输出控制 $u_i = K_i y_i$。

当 C_i 为单位阵时，化为分散状态反馈 $u_i = K_i x_i$。

分散反馈后的闭环系统为

$$\dot{x}_i = (A_{ii}(t) + B_i(t)K_iC_i)x_i + \sum_{j\neq i}^{n} A_{ij}(t)x_j, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{16}$$

我们往往可以利用局部分散控制消除子系统的不稳定性或加强子系统的稳定性，从而可以应用前面的方法对大系统的稳定性进行判断。

从式（16）可以导出类似于式（8）的集结方程

$$\dot{\gamma} = \widetilde{B}(t)\gamma, \tag{17}$$

其中 $\widetilde{B}(t) = [\widetilde{b}_{ij}(t)]$，$\widetilde{b}_{ii}(t) = \mu[A_{ii}(t) + B_i(t)K_iC_i]$，

$$\widetilde{b}_{ij}(t) = b_{ij}(t) = m_{ij}(t), \quad i\neq j, \quad i,j=1,2,\cdots,n。$$

现在的问题在于求 K_i，使得 $\widetilde{b}_{ii}(t)$ 为负值且绝对值尽可能大，以保证稳定性条件成立。

这里研究一个最简单的情况

$$B_i(t) \to b_i \in \mathrm{R}^{l_i}, \quad K_iC_i \to k_i^T, \quad i=1,2,\cdots n.$$

这就是说，各子系统都是单输入的，反馈是状态反馈．这正是实际上最常见的情况，尤其是当我们按大系统来处理系统时．此外，因为各小系统的维数不高，这样的处理也是可行的。现在的问题归结为求 $k_i \in \mathrm{R}^{l_i}$，使得

$$\mu(A_{ii}(t) + b_ik_i^T) \tag{18}$$

取负值且绝对值尽可能大。

对非定常系统来说，用线性变换会带来附加的困难，而不作任何变换时，$\mu_{ii}(A_{ii}(t))$ 取 μ_1 与 μ_∞ 作为测度常常是不成功的．这是由于 $\mu_1<0$，$\mu_\infty<0$，实际上要求 $A_{ii}(t)$ 具有对角占优．所以只有采用 μ_2。

为了显示 k 的作用，使求 k 的表示式简化，对子系统进行常值线性变换

$$x_i = T_i \tilde{x}_i, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{19}$$

其中 $T_i = \left[\begin{array}{c|c} I_{l_i-1} & \\ \hline 0 & b_i \end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} I_{l_i-1} & \tilde{b}_i \\ \hline 0 & b_{i0} \end{array}\right]$，$b_{i0}$ 为实数。

则孤立子系统 $\dot{x}_i = A_{ii}(t)x_i + b_i u_i$ 化为

$$\dot{\tilde{x}}_i = B_{ii}(t)\tilde{x}_i + \bar{b}_i u_i, \quad u_i = \bar{k}_i^T \tilde{x}_i, \quad i=1,2,\cdots n \tag{20}$$

其中 $\bar{k}_i = T_i^T k_i$，$B_{ii}(t) = T_i^{-1}A_{ii}(t)T_i$，$\bar{b}_i = T_i^{-1}b_i = (0,0,\cdots,0,1)^T$，上式中末式可直接验证

$$T_i^{-1}b_i = \left(\begin{array}{c|c} I_{l_i-1} & -\dfrac{1}{b_{i0}}\tilde{b}_i \\ \hline 0 & \dfrac{1}{b_{i0}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \tilde{b}_i \\ \hline b_{i0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right).$$

现在问题化为求 $\bar{k}_i$ 使得

$$\mu(B_{ii}(t) + \bar{b}_i \bar{k}_i^T) \tag{21}$$

取绝对值最大的负值。按定义

$$\mu(B_{ii}(t) + \bar{b}_i \bar{k}_i^T) = \frac{1}{2}\lambda\max[B_{ii}(t) + B_{ii}^T(t) + \bar{b}_i \bar{k}_i^T + \bar{k}_i \bar{b}_i^T].$$

由于 $\bar{b}_i = (0,\cdots 0,1)^T$，求使 $\lambda_{\max} = \min$ 且小于零的 $\bar{k}_i$ 值，当 l_i 不大时是可行的。可直接求出

$$\lambda_{\max}[B_{ii}(t) + B_{ii}^T(t) + \bar{b}_i \bar{k}_i^T + \bar{k}_i \bar{b}_i^T]$$

再选择 k_i。

五、结　论

本文讨论了非定常线性大系统的稳定性问题，应用矩阵的范数和测度对大系统进行集结，得到非定常线性集结方程。在考虑到大系统的结构后，可用按 MSCS 进行分层结构分解的方法[7]，建立大系统的稳定性条件，当子系统数目很大而内联比较疏朗时，更为有效。最后讨论了分散状态反馈的镇定问题。所有计算都是可行的。

参考文献

〔1〕 Siljak, D.D., Large-Scale Dynamic Systems, Elsevier, North-Holland, (1978).

〔2〕 Michel, A. N., Millier, R. K., Qualitative Analysis of Large-Scale Dynamic Systems, Academic Press, New York, (1977).

〔3〕 Singh, M. G., Titli, A., Handbook of Large-Scale Systems Engineering Applications, North-Holland, (1979).

〔4〕 Singh, M. G., Decentralized Control, North-Holland, (1981).

〔5〕 Vidyasagar, M., Nonlinear Systems Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1978).

〔6〕 秦元勋、王联、王慕秋，运动稳定性理论与应用，科学出版社，(1980).

〔7〕 高为炳，大系统的多层结构、稳定性与镇定，中国科学(A 辑)，1，(1982).

STABILITY OF LINEAR TIME-VARIANT LARGE-SCALE SYSTEMS

Gao Weibing

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

In this paper an aggregation equation for linear time-variant large-scale systems are derived using the norm and measure of matrices. Then a stability criterion is obtained. The criterion of stability is considerably simplified in which the structure of the large-scale systems is taken into account. Besides, the problem of decentralized stabilization is analysed. Results obtained in this paper are feasible for engineering application for such difficult time-variant large-scale systems.