第3卷 第1期　　控制理论与应用　　Vol.3, No.1
1986年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1986

# 关于分布参数系统最佳调节器的稳定裕度

李训经
（复旦大学）

**摘　要**

本文直接证明

**定理**　假设

1. $x(\cdot)$是$\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t)$，$x(0)=x_0$的mild解，其中$A$是Hilbert空间$X$上的强连续半群$e^{At}(t\geq 0)$的母元，$u(\cdot)\in L^2([0,+\infty),Z)$，$B\in \mathbf{L}(Z,X)$；

2. 当$\int_0^{\infty}\|u(t)\|^2dt<+\infty$和$\int_0^{\infty}\|Lx(t)\|^2dt<+\infty$时
$$\int_0^{+\infty}\|x(t)\|^2dt<+\infty;$$

3. $P\geq 0$满足$A^TP+PA+L^TL-PBR^{-1}B^TP=0$和
$$\int_0^{+\infty}\|e^{(A-BR^{-1}B^TP)t}\|^2dt<+\infty,$$ 其中$R\gg 0$；

4. $n(\cdot)$：$Z\to Z$是强连续的，且存在$k>0$和$\beta>0$使得
$$\int_0^{+\infty}\|n(u(t))\|^2dt\leq k\int_0^{+\infty}\|u(t)\|^2dt,$$
$$\frac{1+\beta}{2}\int_0^{+\infty}<Ru(t),\ u(t)>dt\leq\int_0^{+\infty}<n(u(t)),\ Ru(t)>dt.$$

那末方程$\dfrac{d\hat{x}(t)}{dt}=A\hat{x}(t)+Bn(-R^{-1}B^TP\hat{x}(t))$的mild解是渐近稳定的。

本文于1984年3月6日收到。

## 一、引 言

第八届IFAC世界大会第8分组会上，Tolle的报告[1]试图把Safonov和Athans[2]关于多变量系统最佳调节器稳定裕度的结果推广到分布参数系统，这是一件有意义的工作．但是，〔1〕在证明结论时使用了系统解的强导数．这样，〔1〕的基本引理和等式(18)的证明是存在问题的．本文的目的在于证明，不利用mild解的强导数，也可以直接推广〔2〕的结果．

## 二、问 题 的 叙 述

设 $X$ 和 $Z$ 是 Hilbert 空间，系统的状态方程是

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \qquad 0<t. \tag{1}$$

$$x(0) = x_0,$$

这里 $A$ 是 $X$ 中 $C_0$ 类算子半群 $e^{At}$ 的母元[3]，$B$ 是 $Z$ 到 $X$ 的线性有界算子；$u(\cdot)$：$[0,+\infty)\to Z$ 是局部 Bochner 平方可积的，称为系统的控制作用，记为 $u(\cdot)\in U_{ad}$．

当 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 时，（1）的 mild 解是

$$x(t) = x(t;u) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds. \tag{2}$$

设 $Q$ 是 $X$ 上的自共轭线性有界算子，$R$ 是 $Z$ 上的自共轭线性有界算子．空间 $X$（或 $Z$）的内积记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$．如果存在正数 $\delta$ 使得 $\langle Rz,z\rangle\geq\delta\langle z,z\rangle$，$z\in Z$，就记它为 $R\gg 0$．

对于系统(1)，当 $u(\cdot)\in L^2([0,+\infty);\ Z)$ 时，考虑目标泛函

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{+\infty}\{\langle Qx(t),x(t)\rangle + \langle Ru(t),u(t)\rangle\}dt. \tag{3}$$

最佳调节器问题是：选择 $u^*(\cdot)\in L^2([0,+\infty);\ Z)$ 使得

$$J(u^*(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J(u(\cdot)). \tag{4}$$

文献〔4,5,6〕讨论了当 $Q\geq 0$，$R\gg 0$ 时的最佳调节器问题．〔7〕讨论了 $R\gg 0$ 但 $Q$ 为不定型的最佳调节器问题，结论是：如果存在自共轭线性有界算子 $P$ 满足 Riccati 方程

$$A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP = 0, \tag{5}$$

并且 $A - BR^{-1}B^TP$ 是 $L^2$ 稳定的算子半群母元，那末

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TPx^*(t) \tag{6}$$

是最佳调节器问题的解．

最佳调节器的裕度问题是：如果系统(1)改为

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bn(u(t)),$$
$$\hat{x}(0) = x_0, \tag{7}$$

而仍设

$$u(t) = -R^{-1}B^TP\hat{x}(t), \tag{8}$$

其中 $P \geq 0$ 适合 Riccati 方程(5)，试问 $n$ 适合什么条件能保证(7)的解仍是渐近稳定的.

设 $n(\cdot)$ 适合条件

$$n(0) = 0, \tag{9}$$

存在常数 $k>0$，使得当 $u(\cdot) \in L^2([0, +\infty); Z)$ 时，成立着

$$\int_0^{+\infty} \langle n(u(t)),\ n(u(t)) \rangle dt \leq k\int_0^{+\infty} \|u(t)\|^2 dt. \tag{10}$$

**定理** 设 $Q = L^TL$，$R \gg 0$，系统(1)对 $L$ 是能检测的，即当 $u(\cdot) \in L^2([0, +\infty); Z)$ 且 $\int_0^\infty \|Lx(t)\|^2 dt < \infty$ 时，有

$$\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt < +\infty,$$

如果 $n(\cdot)$ 适合(9)和(10)，并且存在 $\beta>0$ 使得

$$\int_0^\infty \langle n(u(t)),\ Ru(t) \rangle dt \geq \frac{1+\beta}{2}\int_0^\infty \langle Ru(t),\ u(t) \rangle dt, \tag{11}$$

那末系统(7)在控制作用(8)下是渐近稳定的.

该定理是[2]的定理在分布参数系统的推广. [1]的定理 1 即本定理.

## 三、定理的证明

首先证明下述引理.

**引理1** 设 $N$ 是 $X$ 上的自共轭线性有界算子，那末对于(1)的mild 解(2)，成立等式

$$\langle Nx(t),\ x(t) \rangle = \langle Ne^{At}x_0,\ e^{At}x_0 \rangle + 2\int_0^t \langle Ne^{A(t-s)}x(s),\ e^{A(t-s)}Bu(s) \rangle ds. \tag{12}$$

证明见[7].

**引理2** 设 $P$ 是 Riccati 方程(5)的解，那末

$$\langle Px_0,\ x_0 \rangle = \langle Px(\tau),\ x(\tau) \rangle + \int_0^\tau \langle (Q - PBR^{-1}B^TP)x(t),\ x(t) \rangle dt - 2\int_0^\tau \langle Px(t),\ Bu(t) \rangle dt. \tag{13}$$

证　如果$x(s)$、$y(s)\in D(A)$，那末由(5)得到

$$-\frac{d}{dt}\langle Pe^{A(t-s)}x(s),\ e^{A(t-s)}y(s)\rangle$$

$$=-\langle (A^TP+PA)e^{A(t-s)}x(s),\ e^{A(t-s)}y(s)\rangle$$

$$=\langle (Q-PBR^{-1}B^TP)e^{A(t-s)}x(s),\ e^{A(t-s)}y(s)\rangle.$$

上式对$t$从$s$到$\tau$积分得到

$$\langle Px(s),\ y(s)\rangle-\langle Pe^{A(\tau-s)}x(s),\ e^{A(\tau-s)}y(s)\rangle$$
$$=\int_s^\tau\langle (Q-PBR^{-1}B^TP)e^{A(t-s)}x(s),\ e^{A(t-s)}y(s)\rangle dt. \tag{14}$$

由于$D(A)$在$X$中稠密，且上式各项对$x(s)$、$y(s)$连续，所以(14)对于任何$x(s)$、$y(s)$成立。

特别在上式中取$s=0$，$x(0)=y(0)=x_0$，得到

$$\langle Px_0,x_0\rangle=\langle Pe^{A\tau}x_0,e^{A\tau}x_0\rangle$$
$$+\int_0^\tau\langle (Q-PBR^{-1}B^TP)e^{At}x_0,\ e^{At}x_0\rangle dt. \tag{15}$$

根据引理1，我们有

$$\langle Pe^{A\tau}x_0,\ e^{A\tau}x_0\rangle$$
$$=\langle Px(\tau),\ x(\tau)\rangle-2\int_0^\tau\langle Pe^{A(\tau-s)}x(s),\ e^{A(\tau-s)}Bu(s)\rangle ds, \tag{16}$$

$$\int_0^\tau\langle (Q-PBR^{-1}B^TP)e^{At}x_0,\ e^{At}x_0\rangle dt$$
$$=\int_0^\tau\langle (Q-PBR^{-1}B^TP)x(t),\ x(t)\rangle dt-$$
$$-2\int_0^\tau\int_0^t\langle (Q-PBR^{-1}B^TP)e^{A(t-s)}x(s),\ e^{A(t-s)}Bu(s)\rangle dsdt$$
$$=\int_0^\tau\langle (Q-PBR^{-1}B^TP)x(s),\ x(s)\rangle ds$$
$$-2\int_0^\tau\left\{\int_s^\tau\langle (Q-PBR^{-1}B^TP)e^{A(t-s)}x(s),\ e^{A(t-s)}Bu(s)\rangle dt\right\}ds.$$

在(14)中置$y(s)=Bu(s)$，并代入上式，就得到

$$\int_0^\tau\langle (Q-PBR^{-1}B^TP)e^{At}x_0,\ e^{At}x_0\rangle dt$$
$$=\int_0^\tau\langle (Q-PBR^{-1}B^TP)x(s),\ x(s)\rangle ds$$
$$-2\int_0^\tau\langle Px(s),\ Bu(s)\rangle ds$$
$$+2\int_0^\tau\langle Pe^{A(\tau-s)}x(s),\ e^{A(\tau-s)}Bu(s)\rangle ds. \tag{17}$$

把(16)、(17)代入(15)式就得

$$\langle Px_0,\ x_0\rangle=\langle Px(\tau),\ x(\tau)\rangle$$

$$+\int_0^\tau \langle (Q-PBR^{-1}B^TP)x(s),\ x(s)\rangle ds$$

$$-2\int_0^\tau \langle Px(s),\ Bu(s)\rangle ds.$$

引理2证毕。

定理的证明 对于系统(7)，运用引理2推知

$$\begin{aligned}\langle Px_0,\ x_0\rangle &= \langle P\hat{x}(\tau),\ \hat{x}(\tau)\rangle \\ &\quad+\int_0^\tau \langle (Q-PBR^{-1}B^TP)\hat{x}(s),\ \hat{x}(s)\rangle ds \\ &\quad-2\int_0^\tau \langle P\hat{x}(s),\ Bn(u(s))\rangle ds \\ &= \langle P\hat{x}(\tau),\hat{x}(\tau)\rangle+\int_0^\tau \langle Q\hat{x}(s),\ \hat{x}(s)\rangle ds \\ &\quad-\int_0^\tau \langle Ru(s),\ u(s)\rangle ds \\ &\quad+2\int_0^\tau \langle Ru(s),\ n(u(s))\rangle ds.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\langle Px_0,\ x_0\rangle &= \langle P\hat{x}(\tau),\hat{x}(\tau)\rangle+\int_0^\tau \langle Q\hat{x}(t),\ \hat{x}(t)\rangle dt \\ &\quad+\beta\int_0^\tau \langle Ru(t),\ u(t)\rangle dt \\ &\quad+2\int_0^\tau \langle Ru(t),\ n(u(t))\rangle dt-(1+\beta)\int_0^\tau \langle Ru(t),\ u(t)\rangle dt.\end{aligned}$$

由于 $P\geq 0$ 及条件(11)，得到

$$\begin{aligned}\langle Px_0,\ x_0\rangle &\geq \int_0^\tau \langle Q\hat{x}(t),\ \hat{x}(t)\rangle dt+\beta\int_0^\tau \langle Ru(t),\ u(t)\rangle dt \\ &\geq \int_0^\tau \|L\hat{x}(t)\|^2 dt+\beta\delta\int_0^\tau \|u(t)\|^2 dt.\end{aligned}$$

由于 $\tau>0$ 是任意的，所以 $u(\cdot)\in L^2([0,\ +\infty);\ Z)$ 且

$$L\hat{x}(\cdot)\in L^2([0,\ +\infty);\ LX).$$

而由条件(10)得 $n(u(\cdot))\in L^2([0,\ +\infty);\ Z)$，再根据定理的条件，得到

$$\int_0^\infty \|\hat{x}(t)\|^2 dt<+\infty. \tag{18}$$

置

$$v(\cdot)=n(u(\cdot))+R^{-1}B^TP\hat{x}(\cdot)\in L^2([0,\ +\infty);\ Z).$$

因此

$$\hat{x}(t)=e^{(A-BR^{-1}B^TP)t}x_0+\int_0^t e^{(A-BR^{-1}B^TP)(t-s)}Bv(s)ds.$$

由于 $A-BR^{-1}B^TP$ 是 $L^2$ 稳定的，从而由[6]的引理3.36知 $A-BR^{-1}B^TP$ 是指数稳定

的，而$\nu(\cdot)\in L^2([0,\ +\infty);\ Z)$．由上式知 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\hat{x}(t)\|$存在，故由(18)式知

$$\lim_{t\to+\infty}\|\hat{x}(t)\|=0,$$

即系统(7)是渐近稳定的．

证毕．

## 参 考 文 献


〔1〕 Tolle, H., Stability Margins in Optimal Closed Loops for Certain Distributed Parameter Processes, Preprints of IFAC 8th World Congress, Kyoto, **2**, (1981), 106—111.

〔2〕 Safonov, M. G., Athans, M., Gain and Phase Margin for Multiloop LQG Regulators, IEEE Trans. Automatic Control, AC—**22**, (1977), 173—179.

〔3〕 Yosida, K., Functional Analysis, Fifth Edition, Springer-Verlag, (1978).

〔4〕 Lions, J. L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer-Verlag, (1971).

〔5〕 Balakrishnan, A. V., Applied Functional Analysis, Springer--Verlag, (1976).

〔6〕 Curtain, R. F., Pritchard, A. J., Infinite Dimensional Linear Systems, Springer-Verlag, (1978).

〔7〕 尤云程，抽象空间线性系统二次不定判据的最优控制，复旦大学数学研究所研究生毕业论文，1981．


# MARGIN OF STABILITY FOR THE OPTIMAL REGULATOR OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS


Li Xunjing

( Fudan University, Shanghai )



**Abstract**

The following theorem is proved directly.

**Theorem** Assume that

1. $x(t)$ is the mild solution of equation

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t),\ x(0)=x_0,$$

where A is the infintesimal generator of a strongly continuous semigroup $e^{At}(t\geq 0)$ on Hilbert space $X$, $u(\cdot)\in L^2([0,\ +\infty),\ Z)$ and $B\in L(Z,\ X)$;

2. $\int_0^{+\infty}\|u(t)\|^2dt<+\infty$ and $\int_0^{+\infty}\|Lx(t)\|^2dt<+\infty$ imply $\int_0^{+\infty}\|x(t)\|^2dt<+\infty$;

3. $P\geq 0$ satisfies

$$A^TP+PA+L^TL-PBR^{-1}B^TP=0$$

and

$$\int_0^{+\infty}\|e^{(A-BR^{-1}B^TP)t}\|^2dt<+\infty,$$

where $R\gg 0$;

4. $n(\cdot)$: $Z\to Z$ continuous and there exist constants $k\geq 0$ and $\beta>0$ such that

$$\int_0^{+\infty}\|n(u(t))\|^2dt\leq k\int_0^{+\infty}\|u(t)\|^2dt,$$

$$\frac{1+\beta}{2}\int_0^{+\infty}<Ru(t),\ u(t)>dt\leq\int_0^{+\infty}<n(u(t)),\ Ru(t)>dt\ .$$

Then the mild solution of equation

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt}=A\hat{x}(t)+Bn(-R^{-1}B^TP\hat{x}(t))$$

is asymptotically stable.

This theorem has been pointed out by Tolle[1], but there are some mistakes in the proof of Tolle.