第3卷 第1期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No. 1
1986年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1986

动态扰动解耦补偿器

陈树中
（华东师范大学）

摘　要

本文利用极大绝对能观子系统及其对偶概念，对扰动解耦问题有解的充要条件给出了一个新的形式。对一类多输入多输出系统，给出了解耦补偿器的一般形式和稳定解耦的充要条件。

一、引　言

考虑系统 S：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Dw, \\ y = Cx, \\ z = Hx. \end{cases} \tag{1}$$

其中 x,u,w,y,z 分别是状态，控制，干扰，被调输出，可量测输出。动态补偿器扰动解耦问题（CDDP）在于寻找补偿器

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c z, \\ u = C_c x_c + D_c z. \end{cases} \tag{2}$$

使（1）（2）组成的闭环系统中从 $w \to y$ 的传递函数 $G_y/w \equiv 0$ [1,2,4]。

让 $\hat{x}^T = (x^T x_c^T)$，$\hat{u}^T = (u^T u_1^T)$，$\hat{z}^T = (z^T x_c^T)$，$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\quad \hat{H} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\quad \hat{C} = (C \;\; 0)$$

$\hat{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$，(1)的增广系统 $\hat{S}$ 为：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u}, \\ y = \hat{C}\hat{x}, \\ \hat{z} = \hat{H}\hat{x}. \end{cases} \tag{3}$$

本文于1984年9月3日收到，1985年1月18日收到修改稿。

直按验证可知，CDDP 等价于对$\hat{S}$寻找输出反馈阵K

$$\hat{u}=K\hat{z}=\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ x_c \end{pmatrix} \tag{4}$$

使由（3）（4）构成的闭环系统中$G_y/w\equiv 0$。

若系统$P=(A,B,D,C,\ H)$，$P'=(T(A+DK+FC)T^{-1},TB,TD,CT^{-1},HT^{-1})$，则记为$P\sim P'$，利用座标变换可得下面形式的极大绝对能观规范型[3]

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ 0 & C_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline 0 & C_1 & 0 \end{array}\right]$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccccccc|c}
\begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & A_r & \times & & \cdots & \times & \times & \times & \begin{pmatrix}0\\B_{2r}\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix} & A_{r-1} & \times & & \times & \times & \times & \begin{pmatrix}0\\B_{2r-1}\end{pmatrix} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & A_4 & \times & \times & \times & \\
\begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}I_4\\\times\end{pmatrix} & A_3 & \times & \times & \begin{pmatrix}0\\B_{23}\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}I_3\\\times\end{pmatrix} & A_2 & \times & \begin{pmatrix}0\\B_{22}\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}I_2\\\times\end{pmatrix} & A_1 & \begin{pmatrix}0\\B_{21}\end{pmatrix} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & C_2 & 0
\end{array}\right), \tag{6}$$

其中C_2列满秩，$B_{2i},i=1,\cdots r$或是满秩阵，或是零矩阵，若为零矩阵，则A_{21}中和B_{2i}同一块行中的×亦为零。B_1中的非零行和$B_{2i},i=1\cdots r$中的非零行构成线性无关向量组。

定义 设系统T的系统矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & D_1 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ H_1 & H_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

若对任意 F，$(A_{11}+FH_1, D_1)$能控，则称(H_1, A_{11}, D_1)是 T 的绝对能控子系统，阶数最大者称为极大绝对能控子系统。若还存在 F^0，使 $F^0H_1+A_{21}=0$，则（7）称为极大绝对能控规范型。

用类似求得极大绝对能观规范型的算法，可使（7）有下面形式的极大绝对能控规范型。

$$
\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & D_1 \\ \hdashline A_{21} & 0 \\ \hdashline H_1 & 0 \end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{ccccc|c}
A_1 & \times & \times & \cdots\cdots & \times & D_2 \\
(\times I_2) & A_2 & \times & & \times & 0 \\
(\times 0) & (\times I_3) & A_3 & & \times & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
(\times 0) & (\times 0) & (\times I_{s-1}) & A_{s-1} & \times & 0 \\
(\times 0) & (\times 0) & (\times 0) & (\times 0) & A_s & 0 \\
\hdashline
(\times 0) & (\times 0) & (\times 0) & (\times I_s) & (\times 0) & \\
\vdots & \vdots \quad \cdots & \vdots & & & 0 \\
(\times 0) & (\times 0) & (\times 0) & (\times 0) & (\times 0) & \\
\hdashline
(H_{11}0) & (H_{12}0)\cdots & (H_{1s-2}0) & (H_{1s-1}0) & (H_{1s}0) & 0
\end{array}\right),
\tag{8}
$$

其中 D_2 行满秩，$H_{1i}, i=1,\cdots,s$ 是满秩阵或零矩阵，若为零矩阵，则 A_{21} 中和 H_{1i} 同一块列中的×亦为零。并且 H_2 中非零列和 $H_{1i}, i=1,\cdots s$ 中的非零列构成线性无关向量组。

引理1 若 A_{21}，A_{22}，C_1 有形式（6），则

$$
\left(\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ 0 & C_1 & 0 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc} A_{11} & 0 & \overline{B}_1 \\ A_{21} & \overline{A}_{22} & B_2 \\ 0 & C_1 & 0 \end{array}\right),
\tag{9}
$$

其中$\overline{A}_{22}$仍有（6）中A_{22}的形式。

注1 类似地可将（7）中 A_{12} 消去，A_{11} 变成 $\overline{A}_{11}$，但仍有（8）中的形式，A_{22} 不变。

引理2 若 $P=(C,A,D)$，$P'=(CT^{-1}, T(A+DK+FC)T^{-1}, TD)$，则 P 与 P' 的传递函数的秩相同。

引理1、2 的证明比较简单，故略。

二、主要结果

引理3 若系统(C,A,D)有下面形式：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & D_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_1 & 0 \end{array}\right), \tag{10}$$

其中$(A_{31}A_{32})$,A_{33},C_1分别和（6）式中A_{21},A_{22},C_1形式相同，A_{21},A_{11},D_1和（8）式中的A_{21},A_{11},D_1形式相同，则$C(\lambda I-A)^{-1}D\equiv 0$的充要条件是1）$A_{31}=0$，2）$A_{32}(\lambda I-A_{22})^{-1}A_{21}\equiv 0$。

证　由引理1、2和注1，可设（10）式中的A_{12},A_{13},A_{23}为零，计算$(\lambda I-A)^{-1}$，直接求传递函数即得结论。

定理1　CDDP有解的充要条件是由座标变换，系统S可导致下面形式

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 & D_1 \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_1 & & \\ H_1 & H_2 & H_3 & 0 & \end{array}\right), \tag{11}$$

其中(C_1,A_{33},B_3)是极大绝对能观规范型子系统，(H_1,A_{11},D_1)是极大绝对能控规范型子系统。

证　必要性：考虑增广系统$\hat{S}$

$$\hat{S}=\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & A & B & 0 & D \\ \hline 0 & C & & & \\ 0 & H & & 0 & \\ I & 0 & & & \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \overline{B}_1 & 0 & \overline{D}_1 \\ 0 & \overline{A}_{21} & A_{33} & B_3 & 0 & \overline{D}_2 \\ \hline 0 & 0 & C_1 & & & \\ 0 & \overline{H}_1 & H_3 & & 0 & \\ I & 0 & 0 & & & \end{array}\right), \tag{12}$$

其中(C_1,A_{33},B_3)是(C,A,B)的极大绝对能观规范型子系统，显然也是$(\hat{C},\hat{A},\hat{B})$的极大绝对能观规范型子系统，由文献〔3〕，$\overline{D}_2=0$。

若存在K^*，使传递函数$\hat{C}(\lambda I-\hat{A}-\hat{B}K^*\hat{H})^{-1}\hat{D}\equiv 0$，分两种情形：

i）$(\overline{H}_1,\overline{A}_{11},\overline{D}_1)$不是绝对能控。从这子系统中再分解出绝对能控规范子系统，则

$$\overline{S}=\begin{bmatrix}\hat{A}+\hat{B}K^*\hat{H} & \hat{D}\\ \hat{C} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11}+B_1K_{11}^*H_1 & A_{12}+B_1K_{11}^*H_2 & B_1K_{12}^* & A_{13}+B_1K_{11}^*H_3 & D_1\\ A_{21}+B_2K_{11}^*H_1 & A_{22}+B_2K_{11}^*H_2 & B_2K_{12}^* & A_{23}+B_2K_{11}^*H_3 & 0\\ K_{21}^*H_1 & K_{21}^*H_2 & K_{22}^* & K_{21}^*H_3 & 0\\ A_{31}+B_3K_{11}^*H_1 & A_{32}+B_3K_{11}^*H_2 & B_3K_{12}^* & A_{33}+B_3K_{11}^*H_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_1 & \delta\end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中 H_1,A_{21},A_{11},D_1 有（8）中的形式. $\overline{S}$ 满足引理3条件，必有 $A_{31}+B_3K_{11}^*H_1=0$，所以 (H_1,A_{11},D_1) 是极大绝对能控规范型子系统.

ii） $(\overline{H}_1,\overline{A}_{11},\overline{D}_1)$ 绝对能控．证明类似 i）.

充分性：由定理条件知（13）满足引理 3，因此要选取 $K_{11},K_{12},K_{21},K_{22}$ 使

$$A_{31}+B_3K_{11}H_1=0, \tag{14}$$

$$(B_3T_2,B_3K_{12})\begin{pmatrix}\lambda I-\overline{A}_{22} & -B_2K_{12}\\ -K_{21}H_2 & \lambda I-K_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}T_1H_1\\ K_{21}H_1\end{pmatrix}\equiv 0, \tag{15}$$

其中 $\overline{A}_{22}=A_{22}+B_2K_{11}H_2,B_3T_2=A_{32}+B_3K_{11}H_2,T_1H_1=A_{21}+B_2K_{11}H_1$. （16）

由定理条件，（14）必有解，一般解为

$$K_{11}=-B_3^+A_{31}H_1^++M-B_3^+B_3MH_1H_1^+, \tag{17}$$

其中 Q^+ 指满足 $QXQ=Q$ 的任一解 X[5]，M 是任意矩阵.

关于（15），注意在（11）中可以要求 B_2,B_3 的非零行线性无关，H_1,H_2 的非零列线性无关，而（11）仍满足定理 1）条件．因此对任意 $\overline{K}_{12}$，$\overline{K}_{21}$，下面二个方程关于 K_{12}，K_{21} 有解

$$\begin{pmatrix}B_2\\ B_3\end{pmatrix}K_{12}=\begin{pmatrix}0\\ B_3\overline{K}_{12}\end{pmatrix},\quad K_{21}(H_1,H_2)=(\overline{K}_{21}H_1,0), \tag{18}$$

代入（15）得 $B_3T_2(\lambda I-\overline{A}_{22})^{-1}T_1H_1+B_3\overline{K}_{12}(\lambda I-K_{22})^{-1}\overline{K}_{21}H_1\equiv 0.$ （19）

取 $\overline{K}_{12}=T_2$，$K_{22}=\overline{A}_{22}$，$\overline{K}_{21}=-T_1$，（19）成立，充分性证毕.

下面讨论特殊类型系统的补偿器结构.

（1） $B_2=0$（或 $H_2=0$）展开（15）得

$$B_3(G_0+G(I+G_1))H_1=0, \tag{20}$$

其中 $G_0=T_2(\lambda I-A_{22})^{-1}T_1,G_1=H_2(\lambda I-A_{22})^{-1}T_1,G=K_{12}(\lambda I-K_{22})^{-1}K_{21}$.

（20）的一般解为

$$G=(\overline{M}-B_3^+B_3\overline{M}H_1H_1^+-G_0)(I+G_1)^{-1}, \tag{21}$$

其中$\overline{M}$是任一个严格真有理矩阵。

定理2 若CDDP有解，（11）式中$B_2=0$，则任一补偿器使扰动解耦的充要条件是 1）K_{11}满足（17）。2）对给定的K_{11}，系统(K_{12},K_{22},K_{21})的传递函数满足（21）。

注2 当$H_2=0$时，扰动解耦补偿器有类似结构。

（2） $B_2=0$，$H_2=0$这是类型（1）的特例。用B_3,H_1分别前、后乘（21），由广义逆定义及$G_1\equiv0$可得

$$B_3K_{12}(\lambda I-K_{22})^{-1}K_{21}H_1+B_3T_2(\lambda I-A_{22})^{-1}T_1H_1=0. \tag{22}$$

对这特例，$B_3T_2=A_{32}$，$T_1H_1=A_{21}$，记(A_{32},A_{22},A_{21})同时能控能观子系统为（$\overline{C}$，$\overline{A}$，$\overline{B}$），由（22）可得下面结论。

定理3 若（CDDP）有解，（11）式中$B_2=0,H_2=0$，则

1） 任一补偿器使扰动解耦的充要条件是i）K_{11}满足（17），ii）K_{12},K_{22},K_{21}满足

$$B_3K_{12}=\pm(\times_1 0\overline{C}T^{-1})N^{-1},\quad K_{22}=N\begin{pmatrix}\times & 0 & 0\\ \times & \times & \times\\ \times & 0 & T\overline{A}T^{-1}\end{pmatrix}N^{-1},$$

$$K_{21}H_1=\pm N\begin{pmatrix}0\\ \times_2\\ T\overline{B}\end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$(\times_1\overline{C})\subset I_mB_3,\quad (\times_2^T\overline{B}^TT^{-1})\subset I_mH_1^T, \tag{24}$$

其中N,T非奇异，×是任意阵，$\times_1,\times_2$是满足（24）的任意阵。

2） 最小阶动态解耦补偿器的阶段等于$\dim\overline{A}$

下面讨论稳定的扰动解耦问题。假定（11）式中B_3列满秩，H_1行满秩。由此可设$B_1=0,B_2=0,H_2=0$，否则用座标变换可实现。由可解耦性，K满足定理3），对此特例，$B_3^+B_3=I$，$H_1H_1^+=I$，由（17）式

$$K_{11}=-B_3^+A_{31}H_1^+. \tag{25}$$

对（23）式最后一式求解K_{21}得

$$K_{21}=\pm N\begin{pmatrix}0\\ \times_2\\ T\overline{B}\end{pmatrix}H_1^+. \tag{26}$$

将（23），（25），（26）代入（13）式，用座标变换消去满秩阵N,T，注意到其

中×的任意性，可得闭环稳定的充要条件是

$$\sigma\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{23} \\ \overline{B} & 0 & \overline{A} & \overline{B}H_1^+H_3 \\ 0 & A_{32} & \overline{C} & A_{33}-B_3B_3^+A_{31}H_1^+H_3 \end{pmatrix} \subset \mathbb{C}^- \tag{27}$$

定理4 若系统 S 满足定理1，（11）式中 B_3 列满秩，H_1 行满秩，则 1）稳定的扰动解耦问题有解的充要条件是（11）中 B_1, B_2, H_2 用座标变换消成零后（27）式成立。2）最小阶稳定动态解耦补偿器的阶等于最小阶动态解耦补偿器的阶。

注 3 当 u,w,y,z 是数量时，除 B_3 和 H_1 至少有一个为零的平凡情形外满足定理 4。所以定理 4 推广了文献〔4〕的结果

参 考 文 献

〔1〕 Schumacher. J. M., Compensator Synthesis Based on (C, A, B) -Pairs IEEE Trans AC-**25**, (1980), 1133-1138.

〔2〕 Bhattacharyya, S. p., Transfer Function Condition for Output Feedback Disturbance Lejection, IEEE Trans AC-**27**, (1982), 974-977.

〔3〕 韩京清、许可康，用状态反馈实现稳定的抗干扰性，中国科学，A辑10，（1982），941-950.

〔4〕 Kucera. V., Disturbance Lejection: A Polynomial Approach IEEE Trans Ac-**28**, (1983), 508-511.

〔5〕 黄琳，系统和控制理论中的线性代数，科学出版社，（1984）。

DYNAMICAL DISTURBANCE DECOUPLING COMPENSATOR

Chen Shuzhong
(East China Normal University, Shanghai)

Abstract

In this paper a new form is given for sufficient and necessary condition of disturbance decoupling problem solvability by means of the concept of supremal absolutely observable subsystem and its duality. General form of disturbance decoupling compensator and sufficient and necessary condition for existence of stable decoupling compensator are presented for certain types of MIMO systems.