第3卷 第1期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No.1
1986年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1986

关于《定常线性系统正性和最优性》一文一个结论的注记

李　蓉　生
（西北工业大学）

摘　　要

本文给出了文〔1〕关于线性二次型状态反馈（LQSF）的一个结果的推广．证明了，对于所有$\alpha\geq1$的系数，若$u=-Kx$是一个LQ控制律，则$u=-\alpha Kx$也是一个LQ控制律．

王恩平、王朝珠在〔1〕中证明了下面结论：若$u=-Kx$是一个LQ控制律，则$u=-mKx$对任意自然数或是某个二次型性能指标F的LQ控制律．本文给出这个结论的一个推广，证明当m是大于或等于1的实数时，结论也成立．

显然下面命题是成立的．

命题　对任意实矩阵$A\in R^{n\times n}$，$L\in R^{r\times n}$，$K\in R^{s\times n}$，$C\in R^{t\times n}$有

$$\left.\begin{array}{l}(A,K)\text{可观测（可检测）}\\ L^TL+K^TK=C^TC\end{array}\right\}\Rightarrow(A,C)\text{可观测（可检测）}.$$

下面证明〔1〕结果的推广．

考虑线性定常系统

$$\dot{x}=Ax+Bu\qquad A\in R^{n\times n},\ B\in R^{n\times r}\tag{1}$$

和二次型性能指标

$$J=\int_0^\infty(x^TQx+u^TRu)dt,\tag{2}$$

这里$Q=C^TC$，$R>0$，(A,B)，可控，(A,C)可观测．

我们有：

定理　若$u=-Kx$是加权阵对(Q,R)下系统（1）的LQ控制律，则$u=-\alpha Kx$对所有$\alpha\geq1$的实数，也是某个加权阵对$(\overline{Q},\ \overline{R})$下（1）的LQ控制律．

证　不失一般性，假设$R=1$，由假设必有

$$K=B^TP,$$

$$A^TP+PA-PBB^TP+Q=0.$$

P是正定对称阵．

两边同乘α有

$$A^T(\alpha P)+(\alpha P)A-(\alpha P)BB^T(\alpha P)+(\alpha^2PBB^TP-\alpha PBB^TP)+\alpha Q=0.$$

本文于1984年7月14月收到．1985年6月15日收到修改稿．

令 $\overline{Q} \triangleq \alpha Q + \alpha(\alpha-1)PBB^TP \quad \overline{P} \triangleq \alpha P$

显然有

$$A^T\overline{P} + \overline{P}A - \overline{P}BB^T\overline{P} + \overline{Q} = 0. \tag{3}$$

注意到 $\alpha \geq 1$ 时有

$$\overline{Q} = \alpha C^TC + (\alpha-1)K^TK \triangleq \overline{C}^T\overline{C}.$$

由命题有（A, C）可观测必有（$A, \overline{C}$）可观测，故 Riccati 方程（3）必存在唯一正定解 $\overline{P} = \alpha P > 0$.

而对应的控制律为

$$u = -B^T\overline{P}x = -\alpha B^TPx = -\alpha Kx.$$

故 $u = -\alpha Kx$ 也是一个 LQ控制律.　　证毕.

值得指出的是当 $0<\alpha<1$ 时，结论不一定成立. 例如，考虑 LQ问题：

$$\dot{x} = x + u,$$

$$J = \int_0^\infty (x^2 + u^2)dt.$$

最优控制为 $u = -\sqrt{2}x$，即 $K = \sqrt{2}$.

如果取 $u = -\alpha Kx = -\alpha\sqrt{2}x \quad 0<\alpha<1$，则闭环系统为

$$\dot{x} = (1-\alpha\sqrt{2})x.$$

显然 $\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时系统不再渐近稳定了，因而肯定不是LQ 控制律.

参 考 文 献

〔1〕 王恩平、王朝珠，线性定常系统的正性和最优性，控制理论与应用，1，1，（1984），60—67.

A NOTE ON "POSITIVITY AND OPTIMALITY FOR LINEAR MUTIVARIABLE TIME-INVARIANT SYSTEM"

Li Rongsheng

(Northwestern Polytechnical University, Xian)

Abstract

In this note, the following result is obtained as an extension to the result on LQSF obtained in 〔1〕: for any $\alpha \geq 1$, if $u = -Kx$ is a LQ Control law, the $u = -\alpha Kx$ is also a LQ Control law.