第3卷 第1期　　控制理论与应用　　Vol.3, No.1
1986年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1986

一类时滞微分系统无条件稳定的代数判定

刘　和　涛
（安徽大学）

摘　要

考虑定常的时滞微分系统

（＊）　$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$，$\tau\geqslant 0$，A，B为常数矩阵。

如果对任何实数 $\tau\geqslant 0$，系统（＊）的零解均为渐近稳定，则称系统（＊）为无条件稳定。（＊）为无条件稳定的代数判定问题由A. A. Андрнов[1]于1946年提出。对A、B为2×2矩阵的情形，文〔2,3,4〕考虑了这类问题，但所得形式不够明显或条件不够完整。1984年文〔5〕对此问题给出了结论。本文给出反例以说明文〔5〕定理4.1所给的代数判定条件不是必要的。我们在此给出了A、B为2×2矩阵时的代数判定，它被归结为四次实系数方程无正根的代数判定。

以下用（＊）表示A、B为2×2矩阵时的微分系统．考虑其特征方程，（用$|\cdot|$表示矩阵的行列式）

$$|A+Be^{-\lambda\tau}-\lambda I|=0,\quad I\text{为}2\times 2\text{单位矩阵}.$$

令　$\lambda=iy$，$\tau y=\theta$，（$i=\sqrt{-1}$），则上式化为

$$|A+Be^{-i\theta}-iyI|=|A|-y^2-iy(trA)+|B|e^{-i2\theta}$$
$$+[|A|+|B|-|A-B|-iy(trB)]e^{-i\theta}=0.$$

两边同乘$e^{i\theta}$，并用$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$代入，则易见上式等价于

$$\begin{cases}(|A|+|B|-y^2)\cos\theta+y(trA)\sin\theta=|A-B|-|A|-|B|,\\ -y(trA)\cos\theta+(|A|-|B|-y^2)\sin\theta=y(trB).\end{cases}\qquad(1)$$

通过考虑特征根的分布及文〔2〕定理1，可得

定理1　系统（＊）为无条件稳定等价于$A+B$为稳定矩阵（即特征根的实部均为负）且（1）对实数$y\neq 0$无实根$\theta(y)$。

记
$$S_1(y)=\begin{pmatrix}|A|+|B|-y^2 & y(trA)\\ -y(trA) & |A|-|B|-y^2\end{pmatrix},$$

本文于1984年3月28日收到．1985年12月7日收到修改稿．

$$S_2(y)=\begin{pmatrix} |A|+|B|-y^2 & y(trA) & |A-B|-|A|-|B| \\ -y(trA) & |A|-|B|-y^2 & y(trB) \end{pmatrix},$$

$$D(y)=\det[S_1(y)]=y^4+[(trA)^2-2|A|]y^2+|A|^2-|B|^2,$$

$$Y_2(y)=\begin{vmatrix} |A-B|-|A|-|B| & y(trA) \\ y(trB) & |A|-|B|-y^2 \end{vmatrix},$$

$$Y_3(y)=\begin{vmatrix} |A|+|B|-y^2 & |A-B|-|A|-|B| \\ -y(trA) & y(trB) \end{vmatrix}.$$

由线性方程组理论及后面的引理1，并且注意到$Y_2^2(y)+Y_3^2(y)=D^2(y)$中关于y是偶次出现的，且是八次的，令$y^2=x$，并仍用原来的符号记之，可得

定理 2 系统（ * ）为无条件稳定等价于$A+B$为稳定矩阵且关于x的四次实系数方程$Y_2^2(x)+Y_3^2(x)=D^2(x)$无正根．

则剩下的问题归为四次实系数方程无正根的代数判定，这由后面的引理2给出．这样再加上$A+B$为稳定矩阵的代数判定（这容易求得），就得到了系统（*）为无条件稳定的代数判定．

引理 1 设$A+B$为2×2稳定矩阵．若有实数$y_0\neq0$，使$D(y_0)=0$，则系统（*）不是无条件稳定．

考虑四次实系数方程

$$g(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4=0,$$

以及 $$g'(x)=4x^3+3b_1x^2+2b_2x+b_3=0.$$

利用文〔6〕中三次实系数方程求根的卡尔丹公式，令 $x=S-\frac{b_1}{4}$，则$g'(x)=0$等价于

$$S^3+\left(\frac{b_2}{2}-\frac{3b_1^2}{16}\right)S+\left(\frac{b_1^3}{32}-\frac{b_1b_2}{8}+\frac{b_3}{4}\right)=0\ .$$

则$g'(x)=0$的三个根为

$$x_1=-\frac{b_1}{4}+\sqrt[3]{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)+\sqrt{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)^2+\left(\frac{b_2}{6}-\frac{b_1^2}{16}\right)^3}}$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)-\sqrt{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)^2+\left(\frac{b_2}{6}-\frac{b_1^2}{16}\right)^3}},$$

$$x_2=-\frac{b_1}{4}+\omega\sqrt[3]{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)+\sqrt{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)^2+\left(\frac{b_2}{6}-\frac{b_1^2}{16}\right)^3}}$$

$$+\omega^2\sqrt[3]{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)-\sqrt{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)^2+\left(\frac{b_2}{6}-\frac{b_1^2}{16}\right)^3}},$$

$$x_3=-\frac{b_1}{4}+\omega^2\sqrt[3]{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)+\sqrt{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)^2+\left(\frac{b_2}{6}-\frac{b_1^2}{16}\right)^3}}$$

$$+\omega\sqrt[3]{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)-\sqrt{\left(\frac{b_1b_2}{16}-\frac{b_1^3}{64}-\frac{b_3}{8}\right)^2+\left(\frac{b_2}{6}-\frac{b_1^2}{16}\right)^3}},$$

其中 $2\omega=-1+i\sqrt{3}$. 且若记

$$\Delta\equiv 27(b_1^3-4b_1b_2+8b_3)^2+(8b_2-3b_1^2)^3,$$

则当 $\Delta>0$ 时 x_1 是实根，x_2、x_3 是复根；当 $\Delta\leq 0$ 时有三个实根. 故通过在几何上考虑 $g'(x)=0$ 的根 $x_j(j=1,2,3)$ 处 $g(x_j)$ 的正负性，可得

引理 2 四次实系数方程 $g(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4=0$ 无正根等价于 $b_4\geq 0$ 且下面二条件之一成立：

(i) $\Delta>0$. $x_1\leq 0$ 或 $x_1>0$, $g(x_1)>0$.

(ii) $\Delta\leq 0$. $x_j\leq 0$, $j=1,2,3$. 或对 $j\in\{1,2,3\}$，当 $x_j>0$ 时 $g(x_j)>0$.

易见二阶矩阵 C 为稳定等价于 $|C|>0$ 且 $tr\,C<0$.

令
$$g(x)=D^2(x)-Y_2^2(x)-Y_3^2(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4,$$

其中
$$b_1=2(tr\,A)^2-4|A|-(tr\,B)^2,$$
$$b_2=[(tr\,A)^2-2|A|]^2+2(|A|^2-|B|^2)-(tr\,A)^2(tr\,B)^2-(|A|+|B|-|A-B|)^2+2(|A|+|B|)(tr\,B)^2,$$
$$b_3=2[(trA)^2-2|A|](|A|^2-|B|^2)-2(|A|-|B|)(|A-B|-|A|-|B|)[|A|+|B|-|A-B|-(trA)(trB)]-[(trA)(|A-B|-|A|-|B|)+(trB)(|A|+|B|)]^2,$$
$$b_4=|A-B|(|A|-|B|)^2[2(|A|+|B|)-|A-B|].$$

沿用前面的记号则有

定理 3 系统(*)无条件稳定等价于 $|A+B|>0$, $tr(A+B)<0$, $|A-B|(|A|-|B|)^2[2(|A|+|B|)-|A-B|]\geq 0$ 且下面二条件之一成立：

(i) $\Delta>0$. $x_1\leq 0$ 或 $x_1>0$, $g(x_1)>0$.

（ii）$\Delta\leq 0$. $x_j\leq 0, j=1,2,3$. 或对 $j\in\{1,2,3\}$，当 $x_j>0$ 时 $g(x_j)>0$.

下面给出文〔5〕的反例. 考虑

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=2ax(t)+ax(t-\tau), \\ \dot{y}(t)=dy(t)+dy(t-\tau). \end{cases}$$

其中 $a<0$，$d<0$. 借助于一维情形的代数判定，（例如见文〔2〕例 1）易见两个独立的方程均为无条件稳定，故易见合成的二阶系统是无条件稳定.

若用文〔5〕的记号，则有

$$A_1+A_2+A_3=2ad+2ad+ad+ad>0,$$
$$A_4+A_5=-2a-d-a-d>0,$$
$$A_4-A_5=-2a-d+a+d=-a>0,$$
$$A_1-A_2+A_3=2ad-2ad-ad+ad=0.$$

故若取　$\omega_0=\pi$，则

$$A_1+A_2\cos\omega_0+A_3\cos 2\omega_0=A_1-A_2+A_3=0,$$
$$A_2\sin\omega_0+A_3\sin 2\omega_0=0,$$
$$A_4+A_5\cos\omega_0\neq 0.$$

若仍用 $f(\cos\theta)$ 记文〔2〕、〔5〕中关于 $\cos\theta$ 的四次实系数多项式，则由文〔2〕P185—186，可见

$$\begin{aligned} f(-1)&=f(\cos\omega_0) \\ &=(A_4+A_5\cos\omega_0)^2\Big[(A_1+A_2\cos\omega_0+A_3\cos 2\omega_0)+(-A_5\sin\omega_0) \\ &\quad\times\frac{-A_2\sin\omega_0-A_3\sin 2\omega_0}{A_4+A_5\cos\omega_0}-\left(\frac{A_2\sin\omega_0+A_3\sin 2\omega_0}{A_4+A_5\cos\omega_0}\right)^2\Big] \\ &=0. \end{aligned}$$

即 -1 是 $f(x)=0$ 的根. 故如上方程组不满足文〔5〕定理 4.1 的任一条件. 由此可见文〔5〕定理 4.1 所给的代数判定条件并不是必要的.

参 考 文 献

〔1〕 Андронов, А. А. и Майер, А. Г., Автоматика и Телемеханика 7, 2-3,（1946），95-106.

〔2〕 秦元勋、刘永清、王联，带有时滞的动力系统的运动稳定性，科学出版社，（1963），第六章.

〔3〕 Ku, W. H., IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**10**,（1965），372-373.

〔4〕 Jury, E. I., Inners and Stability of dynamic Systems, New York, Wiley, (1974), chapter 3.

〔5〕 秦元勋、俞元洪，一类时滞微分系统无条件稳定的条件，控制理论与应

用，1,1，(1984)，23－35.
〔6〕 数学手册，人民教育出版社，(1977)，88－89.

THE ALGEBRAIC CRITERION FOR UNCONDITIONAL STABILITY FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH TIME DELAY

Liu Hetao
(Anhui University, Hefei)

Abstract

The problem about the algebraic criterion for unconditional stability with respect to all delay τ for the following system

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \tau \geq 0$, A, B are constant matrices.

has been proposed by A.A. Андронов[1] in 1946. In case A, B are 2×2 matrices, 〔2, 3, 4〕 have considered this problem, but the results they have given are not evident and not complete. 〔5〕 has given a result recently (1984). In this Paper we give a counter example to show that the result given in 〔5〕 is incorrect, that is, the conditions in 〔5〕 are not necessary. We try to reduce this problem to a algebraic criterion of the nonexistence of positive roots of a fourth order equation with real coefficients, in this way, we give the corresponding result for the case where A, B are 2×2 matrices.