第3卷 第1期
1986年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.3, No.1
March, 1986

# 改良型m系列(IMS)及其应用

胡 德 文

(西安交通大学)

**摘 要**

m系列广泛应用于系统脉冲响应函数的辨识．本文证明：选取适当的正负幅度比值，可以使得系列的自相关函数在非零整数点上等于零．将这种系列应用于多输入多输出系统的脉冲响应阵以及ARMA模型的参数辨识，其效果要比原有m系列好得多．论文最后指出：IMS就是功率限制下，MA模型的一种D—最优输入信号．

## 一、改良型m系列(IMS)

**定理1** 系列$(a_1, a_2, \cdots, a_N)$是一$m$系列，若按如下方式构造信号系列$(u_1, u_2, \cdots, u_N)$

$$u_k=\begin{cases}-1 & \text{当 } a_k=0\text{ 时,}\\ 1\pm 2/\sqrt{N+1} & \text{当 } a_k=1\text{ 时,}\end{cases} \tag{1}$$

那么，信号系列$\{u_k\}$称之为IMS，其离散点上的自相关函数为

$$R_{uu}(m)=\begin{cases}(\sqrt{N+1}\pm 1)^2/N & \text{当 } m=0\text{ 时,}\\ 0 & \text{当 } m\in(1,2,\cdots,N-1)\text{ 时.}\end{cases} \tag{2}$$

证 (1)设$(b_1, b_2, \cdots, b_N)$为$(a_1, a_2, \cdots, a_N)$移位$r$个码后的$m$系列($r$不是$N$的倍数)，考虑元素对$(a_k, b_k)$，$k\in(1, 2, \cdots, N)$，有四种情形(1,1)，(1,0)，(0,1)和(0,0)．

设其中(1,1)出现$x$次，因$(a_1, a_2, \cdots, a_N)$中逻辑"1"和逻辑"0"的个数分别为$\dfrac{N+1}{2}$和$\dfrac{N-1}{2}$，且$a_k=1$，相应$b_k$非"1"即"0"，这说明(1,0)，这种情形其出现$\dfrac{N+1}{2}-x$次．对称地，(0,1)也出现$\dfrac{N+1}{2}-x$次．而(0,0)出现的次数即为：$N-2\left(\dfrac{N+1}{2}-x\right)-x$．

(2)以上两系列作模2加法，得到的系列$(c_1, c_2, \cdots, c_N)$仍然是$m$系列，其

本文于1985年7月31日收到．1985年12月11日收到修改稿．

中：$c_k=b_k\oplus a_k$，$k\in(1,2,\cdots,N)$只有在$(a_k,b_k)=(0,1)$或$(1,0)$两种情况下$c_k=1$，其出现次数为$\dfrac{N+1}{2}$。

由此得到方程　$2\left(\dfrac{N+1}{2}-x\right)=\dfrac{N+1}{2}$，即　$x=\dfrac{N+1}{4}$。

故　当$k=1,2,\cdots,N$时，$(a_k,b_k)$中$(1,1)$，$(1,0)$，$(0,1)$，$(0,0)$出现的次数分别为　$\dfrac{N+1}{4}$，$\dfrac{N+1}{4}$，$\dfrac{N+1}{4}$，$\dfrac{N-3}{4}$。

（3）不妨设$(u_1,u_2,\cdots,u_N)$中符号为负的状态的幅值为$-1$，正号时的值取$h$，那么，与$(a_k,b_k)$对应，求自相关函数$R_{uu}(m)$时出现元素时$(h,h)$，$(h,-1)$，$(-1,h)$$(-1,-1)$出现的次数亦为

$$\frac{N+1}{4},\quad\frac{N+1}{4},\quad\frac{N+1}{4},\quad\frac{N-3}{4}.$$

由

$$\begin{aligned}R_{uu}(m)&=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}u_k\cdot u_{\langle k+m\rangle_N}\\&=\frac{1}{N}\left\{\frac{N+1}{4}[h\cdot h]+\frac{N+1}{4}[h\cdot(-1)]+\frac{N+1}{4}[(-1)\cdot h]+\right.\\&\qquad\left.\frac{N-3}{4}[(-1)\cdot(-1)]\right\}\\&=\frac{1}{N}\left(\frac{N+1}{4}h^2-\frac{N+1}{2}h+\frac{N-3}{4}\right).\end{aligned}$$

$m\neq0$；$\langle\cdot\rangle_N$表示模$N$的最小正剩余。

令　$R_{uu}(m)=0$，解二次方程得

$h=1\pm2/\sqrt{N+1}$。

（4）$R_{uu}(0)=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}u_k^2=\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{N+1}{2}h^2+\dfrac{N-1}{2}\right)=(\sqrt{N+1}\pm1)^2/N.$

证毕。

**定理2**　若按以上形式构造连续型IMS，那么，它的自相关函数可表达为（在$|\tau|\leq N-1$范围内）

$$R_{uu}(\tau)=\begin{cases}(1-|\tau|)\cdot(\sqrt{N+1}\pm1)^2/N & |\tau|\leq1\text{时},\\0 & \text{其它}.\end{cases}\tag{3}$$

证　设$a(t)$表示加权值为$\pm1$的$m$系列，且幅值为“$-1$”的状态比“$+1$”的状态

多1. 再设$u(t)$表示IMS的函数表达式，令

$$u(t)=A+B\cdot a(t)$$

$$=\begin{cases}-1 & \text{当}a(t)=+1\text{时},\\ 1\pm 2/\sqrt{N+1} & \text{当}a(t)=-1\text{时},\end{cases}$$

则可解得

$$A=\pm 1/\sqrt{N+1}\text{；}\quad B=-(1\pm 1/\sqrt{N+1}),$$

于是 $$R_{uu}(\tau)=\frac{1}{N}\int_0^N u(t)\cdot u(\langle t-\tau\rangle)dt$$

$$=\frac{1}{N}\int_0^N[A+B\cdot a(t)]\cdot[A+B\cdot a(\langle t-\tau\rangle)]dt$$

$$=A^2+\frac{AB}{N}\int_0^N[a(t)+a(\langle t-\tau\rangle)]dt+\frac{B^2}{N}\int_0^N a(t)\cdot a(\langle t-\tau\rangle)dt$$

$$=A^2+\frac{2AB}{N}\cdot\int_0^N a(t)dt+B^2\cdot R_{aa}(\tau),$$

其中 $$\langle t-\tau\rangle=\begin{cases}t-\tau & \text{当}t\geq\tau,\\ N-(t-\tau) & \text{当}t<\tau.\end{cases}$$

而 $$\int_0^N a(t)dt=\frac{N+1}{2}\cdot(-1)+\frac{N-1}{2}\cdot(+1)=-1,$$

且 $$R_{aa}(\tau)=\begin{cases}-\dfrac{N+1}{N}\cdot|\tau|+1 & \text{当}|\tau|\leq 1\text{时},\\ -\dfrac{1}{N} & \text{当}1\leq|\tau|\leq N-1\text{时}.\end{cases}$$

将此代入$R_{uu}(\tau)$式中，即可得结果。　　　　证毕。

若改变幅值取值条件，则可得到另外二种IMS（略）。

## 二、MIMO系统脉冲响应函数的辨识

为了清晰起见，先看SISO系统的脉冲响应函数的求取。由维纳—霍甫方程的离散形式，有

$$R_{uy}(m)=\sum_{k=0}^{N_s-1}g(k)\cdot R_{uu}(m-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N_s-1} R_{uu}(k)\cdot g(m-k).$$

如果输入信号 $u(k)$ 是周期为 $N_s$ 或大于 $N_s$（$N_s$ 为系统调整时间）的IMS，那么，因 $R_{uu}(k)=0$，$k\in(1,\ 2,\ \cdots,\ N_s)$，即得出

$$R_{uy}(m)=R_{uu}(0)\cdot g(m).$$

亦即

$$g(m)=[R_{uu}(0)]^{-1}\cdot R_{uu}(m). \tag{4}$$

现在再考虑多变量系统，其输入输出数目分别为 $I$ 和 $J$，多变量系统的维纳—霍甫方程的离散形式为

$$R_{uy}(m)=\sum_{k=0}^{N_s-1} R_{uu}(k)\cdot G(k-m),$$

其中 $R_{uy}(\cdot)$，$G(\cdot)$，$R_{uu}(\cdot)$ 分别为 $I\times J$，$I\times I$，$I\times J$ 阶矩阵。

设 $u_1(k)$ 为IMS：$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N)$，定义左移算子 $L^k$ 如下：

$$(a_{k+1},\ a_{k+2},\ \cdots,\ a_N,\ a_1,\ \cdots,\ a_k)=L^k\cdot(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N). \tag{5}$$

并令 $N\geq N_s\cdot I$，$q=[N/I]$。

其中 $N_s$ 为系统总调整时间，$[\cdot]$ 表示取整函数。

若输入信号向量按下式取定

$$u_{i+1}=L^{i\cdot q}\cdot u_1, \tag{6}$$

那么，当 $m\in(1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$ 时，$R_{uu}(m)$ 为零阵，而 $R_{uu}(0)$ 则成为对角线矩阵

$$R_{uu}(0)=\mathrm{diag}[R_{u_1u_1}(0),\ R_{u_2u_2}(0),\ \cdots,\ R_{u_Iu_I}(0)]. \tag{7}$$

于是由多变量系统的维纳—霍甫方程，得其脉冲响应函数阵

$$G(m)=[R_{uu}(0)]^{-1}R_{uy}(m). \tag{8}$$

显然，这比目前由 $m$ 系列和逆重复 $m$ 系列得到的结果简单得多！

## 三、ARMA 模型参数的辨识

### 1. ARMA 模型参数的辨识

考虑离散时间系统

$$y(k)=\alpha_1 y(k-1)+\alpha_2 y(k-2)+\cdots+\alpha_n y(k-n)+\beta_1 u(k-1)+\cdots\beta_n u(k-n)+\varepsilon(k), \tag{9}$$

其中 $\{\varepsilon(k)\}$ 代表噪声，$E[\varepsilon(k)]=0$。

取 $u(k)$ 为IMS周期 $N>2n$，则可推得下式成立

$$R_{uy}(i)=\alpha_1 R_{uy}(i-1)+\cdots+\alpha_n R_{uy}(i-n)+\beta_1 R_{uu}(i-1)+\cdots+\beta_n R_{uu}(i-n)+R_{u\varepsilon}(i).$$

因 $\{u(k)\}$ 与 $\{\varepsilon(k)\}$ 无关，且 $E[\varepsilon(k)]=0$，故 $R_{u\varepsilon}(i)\equiv 0$。

因 $N>2n$，故 $R_{uu}(i-k)=0$，$i,k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$；$i\neq k$，

分别令 $i=1, 2, \cdots, 2n$，则得到 $2n$ 个独立的方程，由此可求得 $[\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n]$。可以推证，可按如下步骤计算。

先求
$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_{uy}(2n-1)\cdots R_{uy}(n)\\ \vdots \qquad \vdots\\ R_{uy}(n) \quad \cdots \quad R_{uy}(1)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}R_{uy}(2n)\\ \vdots\\ R_{uy}(n+1)\end{bmatrix}, \tag{10}$$

则
$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=\frac{1}{R_{uu}(0)}\begin{pmatrix}R_{uy}(1) & R_{uy}(0) & \cdots & R_{uy}(-n+1)\\ R_{uy}(2) & R_{uy}(1) & \cdots & R_{uy}(-n+2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ R_{uy}(n) & R_{uy}(n-1) & \cdots & R_{uy}(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\alpha_1\\ \vdots\\ -\alpha_n\end{pmatrix}. \tag{11}$$

这样，将 $2n\times 2n$ 阶矩阵求逆变为 $n\times n$ 阶矩阵求逆，简化了计算量。

2. 数字仿真举例

考虑离散时间系统

$y(k)=1.5\,y(k-1)-0.7\,y(k-2)+u(k)+0.5\,u(k-1)+\xi(k)-0.7\,\xi(k-1)$，其中 $\xi(k)\sim N(0,1)$，取输入信号为 $N=63$ 的IMS，幅值为 $-1$ 和0.75两值，利用（10），（11）式，取5个周期数，得仿真结果：

$$[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2]=[1.468, -0.659, 0.914, 0.588].$$

若取16个周期数，则得到更为精确的结果：

$$[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2]=[1.510, -0.710, 1.042, 0.492].$$

## 四、最 优 输 入 信 号

对于MA模型，假定其干扰是高斯白噪声，利用已知结果（参[2]等）可得：在输入功率限制下，参数估计对适当幅度IMS输入信号，不仅是一致无偏的，而且能够使得标准设计准则

$$\overline{J}=-\log\det\overline{M}_\beta$$

极小化（其中 $\overline{M}_\beta$ 为Fisher平均信息矩阵）。这样，IMS达到了 $D$—最优输入信号的信息效果。与现有的 $D$—最优输入信号：由Hardmard矩阵设计的Plackett-Burman系列相比，具有易于掌握、设计方便、特别易于推广到多变量系统等优点。不仅如此，IMS还是饱和最优的，即周期长度为 $N+1$ 的IMS可以得到 $N$ 个参数，这显然要比Plackett－Burman系列优越得多。

## 参 考 文 献

[1] 刘豹，m—系列信号在系统动态测试中的应用，化工自动化及仪表，5，（1979）。

〔2〕 韩光文，辨识与参数估计，国防工业出版社，（1980）.
〔3〕 Wernstedt, J., H. J. Hoffmeyer-Zlotnik, A New Variant For The Use of D- optimal Factorial Designs in Estimating Dynamic Multivariable System, Proc. of the IFAC 6th. World Congress, pt. 2, （1975）.

# THE IMPROVED m-SEQUENCE AND IT'S APPLICATIONS

Hu Dewen
( Xian Jiaotong University )

**Abstract**

The m-sequence are widely used to identify the impulse response function of a system. This paper proves: if choose the proper ratio of the positive to negtive amplitude, the autocorrelation function can be equal to zero at nonzero integer point. If apply this sequence to identify the impulse response function matrix and the parameters of ARMA model, the results will much better than the m-sequence. Finally, it is pointed that the IMS is a kind of D-optimal input signal under power constraint.