第3卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No. 2
1986年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1986

一类分布参数系统的镇定问题

雒 炯 敏
（复旦大学）

摘　要

本文讨论 Hilbert 空间 H 中的线性系统〔A, B〕:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

在反馈控制 u(t) = Kx(t) 下的渐近稳定性问题，这里 A 是正常算子，C_0 类算子半群的母元，B: $E^r \to H$ 有界. 本文给出了〔A，B〕亚渐近能稳的某些必要条件和一个充分条件.

一、概　　述

设在 Hilbert 空间 H 上给出了一个线性系统

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

其中　A：$D(A) \subseteq H \to H$ 为某个 C_0 类算子半群的母元，

B：$E^r \to H$ 是线性有界算子，而 E^r 为 r 维复欧氏空间. 系统(1)在什么条件下存在由 K：$H \to E^r$ 决定的反馈控制

$$u(t) = Kx(t),$$

使得(1)在某种意义下是渐近稳定的？

〔1〕给出了当 A 为满足所谓条件(F)的离散谱算子时，极点可以重新配置的一个充要条件. 〔2〕将相应的结果推广到 Banach 空间. 〔3〕的结果表明，当右半平面的谱点重数大于1时，单输入系统无法重新配置这些谱点.

本文在〔1〕的基础上，给出了系统(1)所谓亚渐近能稳的必要条件及一个充分条件.

记 $C^+ = \{\lambda \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}\lambda > 0\}$，$C^- = \{\lambda \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}\lambda < 0\}$，$C^0 = \{\lambda \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}\lambda = 0\}$. 而记 $\sigma(A)$ 为 A 的谱集，$\sigma_p(A)$ 为 A 的点谱集，$\rho(A)$ 为 A 的豫解集.

除特别声明外，恒设 A 为某个 C_0 类算子半群的母元.

定义 1　如果 $\sigma(A) \subseteq C^-$，就称 A 为亚渐近稳定的.

本文于 1983 年 4 月 19 日收到.

定义 2 如果存在$K: H\to E^r$，使得$A+BK$是亚渐近稳定的，就称系统$[A, B]$是亚渐近能稳的，而称K为反馈算子。

记$K=\begin{pmatrix} k_1^T \\ \vdots \\ k_r^T \end{pmatrix}$ $H\to E^r$，$k_i\in H$，而$\forall x\in H$，$k_i^T x\triangleq(k_i, x)$，类似地，记$B=(b_1,\cdots,b_r)$：$E^r\to H$，$b_i\in H$，而$\forall u\in E^r$，$Bu=\sum\limits_{i=1}^{r}u_i b_i$。

定义 3 如果A满足条件D

$A=A_1\oplus A_2$，$\sigma(A_1)=\sigma(A)\cap C^-$，$\sigma(A_2)=\sigma(A)\cap(C^0\cup C^+)$；

$\sigma(A_1)$和$\sigma(A_2)$在复平面的欧氏拓扑下是分离的。

就称A为D算子。

本文主要结果是

定理 1 如果$[A, B]$是亚渐近能稳的，且反馈算子为K，那么

1）$\sigma(A)\cap(C^0\cup C^+)=\sigma_p(A)\cap(C^0\cup C^+)$为离散集，且它与$\sigma(A)\cap C^-$分离；

2）$\forall\lambda_0\in\sigma(A)\cap(C^0\cup C^+)$，$\mathrm{rank}(KE(\lambda_0)B)=\dim E(\lambda_0)H$（当$A$正常时）。

（此处$E(\lambda_0)$为A在λ_0处的谱投影，见[6]）

注 当A正常时，1）意味着A是一个D算子，而2）意味着λ_0的重数$\leq r$。

定理 2 设A为正常的D算子，除满足1），2）外又满足

3）$[A, B]$近似能控，且$\forall\lambda_i\in\sigma(A_2)$，

$$B^*E(\lambda_i)B=\begin{pmatrix} \|E(\lambda_i)b_1\|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|E(\lambda_i)b_r\|^2 \end{pmatrix},$$

4）$\inf\{|\lambda_i-\lambda_j|\,|\,\lambda_i\neq\lambda_j\in\sigma(A_2)\}=\delta>0$；

5）$$\sum_{\substack{\lambda_i\in\sigma(A_2)\\ E(\lambda_i)b_j\neq0}}\frac{(\mathrm{Re}\lambda_i)^2}{\|E(\lambda_i)b_j\|^2}<\infty\quad(j=1,2,\cdots,r),$$

那么，$[A,B]$是亚渐近能稳的。

定理 3 若A为正常的D算子，$[A,B]$亚渐近能稳，且满足条件4），及

6）$$\sum_{\lambda_i\in\sigma(A_2)}\frac{1}{d(\lambda_i,\sigma(A_1))^2}<\infty,$$

那么，$$\sum_{\lambda_i\in\sigma(A_2)}\frac{(\mathrm{Re}\lambda_i)^2}{\|E(\lambda_i)B\|^2}<\infty.$$

二、定理的证明

为了证明定理 1，先证明下述的

引理 1 设 A: $D(A)\subseteq H\to H$ 线性，B: $E^r\to H$，K: $H\to E^r$ 线性有界，那么

1° $\sigma(A+BK)\subseteq\sigma(A)\cup\sigma_p(A+BK)$，

2° $\sigma(A)\setminus\sigma_p(A)\subseteq\sigma(A+BK)$，

3° $\sigma_p(A)\cap\sigma(A+BK)\subseteq\sigma_p(A+BK)$，

4° $\rho(A)\cap\rho(A+BK)=\{\lambda\in\rho(A)\,|\det[I-K(\lambda-A)^{-1}B]\neq0\}$，此时，

$$(\lambda-A-BK)^{-1}=(\lambda-A)^{-1}+(\lambda-A)^{-1}B[I-K(\lambda-A)^{-1}B]^{-1}K(\lambda-A)^{-1}.$$

又，$\sigma_p(A+BK)\cap\rho(A)=\sigma(A+BK)\cap\rho(A)=\{\lambda\in\rho(A)\,|\det[I-K(\lambda-A)^{-1}B]=0\}$.

证 因为 BK: $H\to H$ 是有限秩算子，所以是全连续的，由此 1° 成立.

类似于1°，有 $\sigma(A)\subseteq\sigma(A+BK)\cup\sigma_p(A)$，所以 $\sigma(A)\setminus\sigma_p(A)\subseteq\sigma(A+BK)$，即为2°.

又 $\sigma_p(A)\cap\sigma(A+BK)\subseteq\sigma_p(A)\cap(\sigma(A)\cup\sigma_p(A+BK))=\sigma_p(A)\cap\sigma_p(A+BK)$，所以，3°成立.

类似于[2]中推导，我们可得 4°.

系 如果 $[A,B]$ 为亚渐近能稳，那末 $\sigma(A)\cap(C^0\cup C^+)\subseteq\sigma_p(A)$.

证 由定义，存在 K，使得 $\sigma(A+BK)\subseteq C^-$.

∴ $\sigma(A)\subseteq\sigma(A+BK)\cup\sigma_p(A)\subseteq C^-\cup\sigma_p(A)$.

故 $\sigma(A)\cap(C^0\cup C^+)\subseteq\sigma_p(A)\cap(C^0\cup C^+)$.

引理 2 如果 $[A,B]$ 亚渐近能稳，那末，$\forall\lambda_0\in\sigma_p(A)\cap(C^0\cup C^+)$，$\lambda_0$ 不是 $\sigma(A)$ 之极限点.

证 若不然，则存在 $\lambda_n\in\sigma(A)$，使得 $\lambda_n\to\lambda_0\ (n\to\infty)$.

由于 $\lambda_0\in C^0\cup C^+\subseteq\rho(A+BK)$，而 $A+BK$ 为闭算子，所以由[9]的系 3.2.1. 得知 $\sigma(A+BK)$ 为闭集，即 $\rho(A+BK)$ 为开集.

因此，不妨设 $\lambda_n\in\rho(A+BK)\cap\sigma(A)=\rho(A+BK)\cap\sigma_p(A)$.

∴ 由引理 1 的 4° 知，$\det[I+K(\lambda_n-A-BK)^{-1}B]=0$，$n=0,1,2,\cdots$.

于是，对于 $\rho(A+BK)$ 上的解析函数 $f(\lambda)=\det[I+K(\lambda-A-BK)^{-1}B]$ 而言，有

$$f(\lambda_n)=0,\ f(\lambda_0)=0,\ 而\ \lambda_n\to\lambda_0\quad(n\to\infty).$$

根据解析函数唯一性定理知，在 $C^0\cup C^+$ 上，$f(\lambda)\equiv0$.

于是再由引理 1 的 4°，$C^0\cup C^+\subseteq\sigma_p(A)$，但这与 A 是 C_0 类算子半群的母元矛盾.

由此引理，我们得知，如果 $[A,B]$ 是亚渐近能稳的，那末，$\sigma_p(A)\cap(C^0\cup C^+)$ 为离散集，且它与 $\sigma(A)\cap C^-$ 在复平面的欧氏拓扑意义下是分离的.

定理 1 的证明 由引理 1 的系及引理 2 立即得证 1）.

现证明 2） 由 1）得知 $\forall\lambda_0\in\sigma_p(A)\cap(C^0\cup C^+)$，它是 $\sigma(A)$ 的孤立点，所以可定义 $E(\lambda_0)$.

我们断言，此时 $E(\lambda_0)H=E(\lambda_0)B\triangleq\mathrm{span}\{E(\lambda_0)b_1,\cdots,E(\lambda_0)b_r\}$.

若不然，则 $\exists\ \eta\in E(\lambda_0)H$，使得 $\eta^T E(\lambda_0)B=0$，$\eta=E(\lambda_0)\eta\neq 0$.
而 $\lambda_0\in\rho(A+BK)$，即 λ_0-A-BK 可逆.
$\therefore$ $\exists\ \xi\in D(A)$，使得 $\eta=(\lambda_0-A-BK)\xi$.
注意 A 是正常的.
于是，$\|\eta\|^2=\eta^T E(\lambda_0)\eta=\eta^T E(\lambda_0)(\lambda_0-A-BK)\xi=\eta^T E(\lambda_0)(\lambda_0-A)\xi$
$=\eta^T(\lambda_0-A)E(\lambda_0)\xi=0$，矛盾.
$\therefore$ $\dim E(\lambda_0)H=\dim E(\lambda_0)B=\mathrm{rank}(E(\lambda_0)B)$.
今若 $\mathrm{rank}(KE(\lambda_0)B)<\dim E(\lambda_0)H$，而 $\mathrm{rank}(E(\lambda_0)K^*)=\dim E(\lambda_0)H\triangleq r_0$，
此处，$K^*=(k_1,\cdots,k_r)$.
则不妨设 $\mathrm{rank}(E(\lambda_0)K_1^*)=r_0$，$K_1^*=(k_1,\cdots,k_{r_0})$，
亦不妨设 $\mathrm{rank}(E(\lambda_0)B_1)=r_0$，$B_1=(b_1,\cdots,b_{r_0})$.
于是，$\mathrm{span}\{E(\lambda_0)k_1,\cdots,E(\lambda_0)k_{r_0}\}=\mathrm{span}\{E(\lambda_0)b_1,\cdots,E(\lambda_0)b_{r_0}\}$.
$\therefore$ $\exists\ r_0$ 阶可逆阵 U，使 $E(\lambda_0)K_1^*=E(\lambda_0)B_1U$.
$\therefore$ $K_1E(\lambda_0)B_1=U^*(E(\lambda_0)B_1)^*(E(\lambda_0)B_1)$，它的秩为 r_0，矛盾.
$\therefore$ 只能 $\mathrm{rank}E(\lambda_0)K^*<r_0$.
因此，$\exists\eta\in E(\lambda_0)H$，$\eta\neq 0$，使得 $\eta^T E(\lambda_0)K^*=0$，即 $K\eta=0$.
从而，$(\lambda_0-A-BK)\eta=(\lambda_0-A)\eta=0$.
$\therefore$ $\lambda_0\in\sigma_p(A+BK)$，但由假设 $\lambda_0\in C^0\cup C^+)\subseteq\rho(A+BK)$，矛盾.
故只能 $\mathrm{rank}[KE(\lambda_0)B]=\dim E(\lambda_0)H$.
为证明定理 2，我们需要下面的引理，为节省篇幅，略去证明.

引理 3　设 $\{\lambda_n\}_1^\infty$ 是复平面上的一个点列，满足如下条件：$\inf\limits_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|=\delta>0$，且 $\exists$ 实数 M_1，M_2，使得 $M_1\le\mathrm{Re}\lambda_n\le M_2$，$\forall n$ 成立，那末

$$\sup_{1\le k<\infty}\sum_{\substack{i\neq k\\ i=1}}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_i-\lambda_k|^2}=\gamma\le\infty.$$

注　此引理说明，当 $\mathrm{Re}\sigma(A)$ 有界时，[1]中条件 F_2 蕴含条件 F_3. 而对 C_0 类算子半群母元的 A 而言，$\mathrm{Re}\sigma(A)$ 上有界是恒满足的，又若 A 为 D 算子，则 $\mathrm{Re}\sigma(A_2)$ 是有界的.

引理 4　若 $A=A_1\oplus A_2$，对应地 $B=B_1\oplus B_2$，则 $[A,B]$ 近似能控蕴含 $[A_1,B_1]$ 近似能控.

证　首先，对于 $A=\begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{pmatrix}$，易知，$e^{At}x=\begin{pmatrix}e^{A_1t}x_1\\ e^{A_2t}x_2\end{pmatrix}$. 此处，$e^{A_1t}$，

$e^{A_2 t}$，分别是 H_1，H_2 上的 C_0 类算子半群($H=H_1\oplus H_2$)。

于是，$x(t)=e^{At}x^0+\int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$

$$=\begin{pmatrix} e^{A_1 t}\quad x_1^0+\int_0^t e^{A_1(t-s)}B_1u(s)ds \\ e^{A_2 t}\quad x_2^0+\int_0^t e^{A_2(t-s)}B_2u(s)ds \end{pmatrix}.$$

对 $Gu=\int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds$,

记 $G_1u=\int_0^{t_1} e^{A_1(t_1-s)}B_1u(s)ds$，$G_2u=\int_0^{t_1} e^{A_2(t_1-s)}B_2u(s)ds$,

则 $G=\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$，$G_i\in \mathsf{L}(L^p([0,t_1];U),H_i)$，$i=1,2$，$U\subseteq E^r$.

$\because$ $[A,B]$近似能控,

$\therefore$ $\overline{\mathsf{R}(G)}=H$,

而 $\overline{\mathsf{R}(G)}=\overline{\mathsf{R}(G_1)}\oplus\overline{\mathsf{R}(G_2)}$,

$\therefore$ $\overline{\mathsf{R}(G_1)}=H_1$，即$[A_1,B_1]$近似能控.

系　若 A 为正常的 D 算子，对应分解为 $A=A_1\oplus A_2$，$[A,B]$近似能控，那末对任何 $\sigma_p(A)$中 $\sigma(A)$的孤立点 λ_0，恒有 $E(\lambda_0)B=E(\lambda_0)H$.

证　记 $H_0=E(\lambda_0)H$，则 $A|_{H_0}=\lambda_0 I_{H_0}$.

由上面引理，此时$[\lambda_0 I_{H_0}, E(\lambda_0)B]$亦近似能控.

而此时，$G_0u=\int_0^{t_1} e^{\lambda_0(t_1-s)}E(\lambda_0)Bu(s)ds=E(\lambda_0)B\int_0^{t_1} e^{\lambda_0(t_1-s)}u(s)ds$.

易知，$E(\lambda_0)H=\overline{\mathsf{R}(G)}=E(\lambda_0)B$.

定理2的证明　记 $B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$，$B_1=E(\sigma(A_1))B$，$B_2=E(\sigma(A_2))B$，设 $\sigma(A_2)=\{\lambda_i\}_1^\infty$.

作　$H_{2i}=\overset{\infty}{\underset{i=1}{V}}E(\lambda_i)b_i=\overset{\infty}{\underset{i=1}{V}}E(\lambda_i)b_{2i}$，$(b_{2i}=E(\sigma(A_2))b_i)$

由条件　$B^*E(\lambda_i)B=\begin{pmatrix} \|E(\lambda_i)b_1\|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|E(\lambda_i)b_r\|^2 \end{pmatrix}$得知

$b_l^T E(\lambda_i)b_j=\delta_{lj}\|E(\lambda_i)b_j\|^2$，$\therefore$ $b_{2l}^T b_{2j}=\delta_{lj}\|b_{2j}\|^2$.

$\therefore \quad H_2 = \bigoplus_{j=1}^{r} H_{2j}, \quad A_2 = \bigoplus_{j=1}^{r} A_{2j}, \quad A_{2j} = A_2 |_{H_{2j}}.$

容易知道，A_{2j} 为单重点谱的正常算子，满足〔1〕中条件 F_1，F_2，F_3。今取 $\nu_i = \lambda_i - 2\mathrm{Re}\lambda_i$，

$$\text{则} \quad \sum_{\substack{\lambda_i \in \sigma(A_2) \\ E(\lambda_i)b_j \neq 0}} \frac{|\nu_i - \lambda_i|^2}{\|E(\lambda_i)b_j\|^2} = \sum_{\substack{\lambda_i \in \sigma(\lambda_2) \\ E(\lambda_i)b_j \neq 0}} \frac{4(\mathrm{Re}\lambda_i)^2}{\|E(\lambda_i)b_j\|^2} < \infty.$$

$\therefore$ 由〔1〕的定理1得知，$\exists\ k_{2j} \in H_{2j}$，使得 $\sigma(A_{2j} + b_{2j}k_{2j}^T) = \{\nu_i\}_1^\infty \subseteq C^-$.

$$\text{令} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} k_{21}^T \\ \vdots \\ k_{2r}^T \end{pmatrix}, \qquad K = (0,\ K_2),$$

$$\text{则} \qquad A + BK = \begin{pmatrix} A_1 & B_1K_2 \\ 0 & A_2 + B_2K_2 \end{pmatrix},$$

$\therefore \quad \sigma(A + BK) \subseteq \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2 + B_2K_2)$.

而 $\quad \sigma(A_2 + B_1K_2) = \sigma\left(\bigoplus_{j=1}^{r} (A_{2j} + b_{2j}k'_{2j})\right) = \bigcup_{j=1}^{r} \sigma(A_{2j} + b_{2j}k'_{2j}) \subseteq C^-$.

故 $\quad \sigma(A + BK) \subseteq C^-$.

即〔A, B〕是亚渐近能稳的.

利用完全类似于〔1〕中定理2.1的证明方法可以得证定理3.

三、一 些 注 记

注 1　按照〔4〕，我们给出下述定义：

定义 4　设 e^{At} 是 Banach 空间 X 上的 C_0 类算子半群，如果存在 Banach 空间 Y，及同构 Φ：$X \to Y$ 使得 $\|\Phi(x)\|_Y \leq M\|x\|$，$\|\Phi(e^{At}x)\|_Y \leq N\|\Phi(x)\|_Y$，且 $\lim\limits_{t\to\infty} \|\Phi(e^{At}x)\|_Y = 0$，$(\forall x \in X)$ 那末，就称 e^{At} 是拟渐近稳定的.

〔4〕中定理3的系给出，当 X 自反时，$\sigma(A) \subseteq C^-$ 可导致 e^{At} 拟渐近稳定.因此，本文中所引进的亚渐近稳定蕴含拟渐近稳定.而若我们引进下述相应的

定义 5　如果存在 K 使得 Hilbert 空间 H 上的算子 $A + BK$ 拟渐近稳定，那末称系统〔A, B〕是拟渐近能稳的.

则易知，亚渐近能稳蕴含拟渐近能稳.

注 2　定理2的条件4）不是必要的。事实上，如果 $\sigma(A_2) = \{\lambda_i\}_1^\infty \cup \{\nu_i\}_1^\infty$，而 $0 < |\lambda_i - \nu_i| \to 0\ (i \to \infty)$，又 $B = (B_1, B_2)$，使得 $E(\lambda_i)B_1 = E(\lambda_i)H$，$E(\nu_i)B_2 = E(\nu_i)H$，

$\forall i$ 成立，定理 2 其它条件不变，则易知$[A,B]$仍是亚渐近能稳的.

注 3 条件 $B^*E(\lambda_i)B=\begin{pmatrix}\|E(\lambda_i)b_1\|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|E(\lambda_i)b_r\|^2\end{pmatrix}$ 的含义是，$b_1,\cdots,b_r$ 作为 H 中的一组向量而言，在每个 A_2 的特征子空间 $E(\lambda_i)H$ 上的投影是两两正交的.

注 4 若 A_1 亦为离散谱的正常算子，且 $\inf\{|\lambda_i-\lambda_j|\,|\,\lambda_i\neq\lambda_j\in\sigma(A)\}=\delta>0$，又 $\dim E(\lambda_i)H=1$，$\forall\lambda_i\in\sigma(A)$，$B=b$，则问题化为[1]中讨论过的问题，而此时若 $K\dim E(\lambda_i)H\leq r$，则化为[3]所讨论的问题.

注 5 在[1]、[2]和[3]中，用的均是单输入控制，并且[3]已指出仅用单输入是无法转移重数大于 1 的点谱的，而本文对多输入系统讨论所得的结果在某种意义上体现了多输入优越于单输入这一自然的想法.

致谢 本文是在李训经先生指导下完成的.孙顺华先生亦曾对本文提出宝贵意见，作者在此谨表示谢意.

参 考 文 献

[1] 孙顺华，完全可控线性系统的谱分布，数学学报，**21**，3，(1978)，193—204.

[2] 王体翔，关于具有离散谱的线性无界算子的摄动问题及其应用，南京大学学报，1，(1981)，1—12.

[3] 余大海，无界离散谱算子的扰动及谱分布，四川大学学报，4，(1982)，11—18.

[4] 黄发伦，关于线性半群的稳定性和镇定问题，科学通报，9，(1978)，525—529.

[5] Curtain, Ruth F. &. Pritchard, A. J., Infinite Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, (1978).

[6] Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, (1980).

[7] Goldberg, S., Unbounded Linear Operators Theory and Application, McGraw-Hill Book Company.

[8] Dowson, H. R., Spectral Theory of Linear Operators, Academic Press Inc.

[9] Balakrishnan, A. V., Applied Functional Analysis, Springer-Verlag, (1976).

[10] Schechter, M., Invariance of the Essential Spectrum, Bull. Am. Math. Soc., **71**, (1965), 365—367,

ON STABILIZATION OF A CLASS OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

Yong Jiongmin

(Fudan University, Shanghai)

Abstract

In this paper, we discussed the stabilization of linear system $[A,B]$ in a Hilbert space H:

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bu$$

under a feedback control $u(t)=Kx(t)$, where A is normal and the generator of a C_0-semigroup, $B:E'\to H$ bounded. Some necessary conditions and a sufficient condition for linear system $[A,B]$ being so-called substabilization are given.