第3卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No. 2
1986年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1986

线性定常系统次最优控制的一个算法

李树生　吴学曼
（鞍山钢铁学院）

摘　要

本文研究了线性定常系统无限终端时间的次最优调节器的数值计算问题，提出一种算法并讨论迭代初值的选取。结合计算实例阐述算法的优点。

一、引　言

线性系统的最优调节器理论已近完善。这种理论认为，全部状态变量都能检测出来，反馈通道没有约束，并确定出状态变量全部反馈的最优反馈矩阵。但是实际系统并不常常可以把全部状态变量检测出来。此外，全部状态变量进行反馈也使系统繁锁庞大，增加了复杂性。因此七十年代以来出现了次最优控制理论。次最优调节器是实现状态变量中的一部分“元”的反馈，并使某一性能指标达到最小。

文献〔1〕、〔2〕、〔3〕研究了上述问题，所得的结论是一致的。主要结论如下：(1)式给出系统的动态方程，反馈向量 Z 由（2）式实现，Z 是状态向量 X 的线性组合。M 为系统结构所确定的矩阵，问题归结为求最优反馈阵 H°，从而（3）式使（4）式的指标函数最小。

$$\dot{X}=AX+BU, \tag{1}$$

初始状态为 X(0)

$$Z=MX, \tag{2}$$

$$U=-HZ=-HMX=-FX, \tag{3}$$

$$J=\int_0^\infty (X^\tau QX+U^\tau RU)dt=\int_0^\infty X^\tau(Q+F^\tau RF)Xdt=\int_0^\infty X(Q+M^\tau H^\tau RHM)Xdt, \tag{4}$$

其中向量、常数矩阵及它们的维数如下：$X_{n\times1}$、$U_{m\times1}$、$Z_{l\times1}$　$(l\leq n)$、$A_{n\times n}$、$B_{n\times m}$、$H_{m\times l}$、$M_{l\times n}$（M 的秩为 l）、$F_{m\times n}$、$R_{m\times m}$（R是正定对称阵）、$Q_{n\times n}$（Q 是半正定对称阵）。与最优控制的区别是寻求最优反馈阵 H°，而不是求最优反馈阵 F°，这是因为（3）式中的 M 是事先选定了的。

根据（3）式再写出

本文于1984年5月5日收到，1985年5月27日收到修改稿。

$$\dot{X}=(A-BF)X=(A-BHM)X, \tag{5}$$

$$X=\Phi(t,0)X(0), \tag{6}$$

$$\Phi(t,0)=\exp[(A-BHM)t]。 \tag{7}$$

（7）式是系统的闭环转移矩阵，给定 H 使 $\Phi(t,0)$ 的全部特征根均有负实部即得（6）式的稳定解。将（6）代入（4）得

$$J=X^\tau(0)\left[\int_0^\infty \Phi^\tau(t,0)(Q+M^\tau H^\tau RHM)\Phi(t,0)dt\right]X(0)=X^\tau(0)VX(0), \tag{8}$$

式中

$$V=\int_0^\infty \Phi^\tau(t,0)(Q+M^\tau H^\tau RHM)\Phi(t,0)dt. \tag{9}$$

因为 $\Phi(t,0)$ 是稳定满秩方阵，所以积分号下的函数仍然是半正定的对称阵，从而积分收敛且保持正定性，V 必是正定对称阵。由于 $X(t)$ 不能恒为零，也不能使（4）式积分号下的函数处处为零，$X^\tau VX$ 将是一个李亚普诺夫函数。且有

$$V(A-BHM)+(A-BHM)^\tau V+Q+M^\tau H^\tau RHM=0, \tag{10}$$

（10）式也是确定 V 的一个方程。对应（9）式的积分形式，（10）式可认为是微分形式。最优 H° 将决定最小指标函数 V° 和 $X^\tau(0)V^\circ X(0)$。当 $M=I$，则

$$H^\circ M=H^\circ=R^{-1}B^\tau V^\circ$$

即是线性最优控制的结果。这时（10）式变成典型的 Riccati 方程。

二、次最优调节器

（4）式和（8）式表示的性能指标函数是 H 和初始状态 $X(0)$ 的函数，可表示为

$$J=X^\tau(0)V(H)X(0),$$

由于 $X(0)$ 是随机变量，可以用 J 的期望值取代 J

$$\hat{J}=E[J]=E\left[X^\tau(0)\left(\int_0^\infty \Phi(t,0)(Q+M^\tau H^\tau RHM)\Phi(t,0)dt\right)X(0)\right].$$

把 $X(0)$ 看成是 n 维空间单位球面上均匀概率分布的随机变量则得出

$$\hat{J}=\frac{1}{n}\mathrm{tr}V(H)。 \tag{11}$$

于是次最优控制是对（11）式求条件极值的问题。其约束方程是

$$G(V,H)=V(A-BHM)+(A-BHM)^\tau V+Q+M^\tau H^\tau RHM=0. \tag{12}$$

不考虑常数，写出 Lagrange 函数

$$h(L,H,V)=\mathrm{tr}V+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}G_{ij}(V,H), \tag{13}$$

式中 L_{ij} 及 G_{ij} 是伴随矩阵 L（拉格朗日乘子阵）及 G 中的各个元。把（13）式写成便于求导的形式

$$h(L,H,V)=\mathrm{tr}V+\mathrm{tr}(L^\tau G)=\mathrm{tr}V+\mathrm{tr}[L^\tau(V(A-BHM)+(A-BHM)^\tau V+Q+M^\tau H^\tau RHM)],$$

h 取最小值的必要条件是：i。$\frac{\partial h}{\partial H}=0$，ii. $\frac{\partial h}{\partial V}=0$，iii. $\frac{\partial h}{\partial L}=0$.

由 i 得 $$H=R^{-1}B^{\tau}VLM^{\tau}(MLM^{\tau})^{-1}, \quad (14)$$

由 ii 得 $$I+L(A-BHM)^{\tau}+(A-BHM)^{\tau}L=0, \quad (15)$$

由 iii 得 $$V(A-BHM)+(A-BHM)^{\tau}V+Q+M^{\tau}H^{\tau}RHM=0. \quad (16)$$

（14）～（16）是一个满足极值必要条件的方程组。

联解（14）～（16）式得到最优 H°、V°、L°。（16）式就是原约束方程（12）。在 $A-BH^{\circ}M$ 的全部特征根都有负实部的条件下（15）、(16)显然有正定解 L° 及 V°。求解（14）～（16）是件麻烦事。M. Athans 提出过一种粗略的算法思想。R. L. Kosut 提出两种近似算法：最小范数法和最小误差激励法[3]，虽然简化了计算但是误差较大。本文提出一种新算法并作出了计算机程序。

三、算 法

将（14）代入（16），再将（14）～（16）写成如下形式

$$H=W(L,V), \quad (17)$$

$$\theta(L,H)=0, \quad (18)$$

$$\Phi(L,V)=0. \quad (19)$$

（1）设定一个初值 H_0 使 $A-BH_0M$ 的特征根均有负实部，将 L_0 代入（18）解线性矩阵方程求出 L_0，

（2）将 L_0 代入（19）解非线性方程求出 V_0，

（3）将 L_0，V_0 再代入（17）式求出 H_1，以后重复迭代，直至达到某一个精度指标时停止。所求出的 H_N、L_N、V_N 按某一精度指标逼近最优 H°、V°、L°。上述迭代关系可以写成：

已知 H_N 由 $\theta(L_N,H_N)=0$ 求出 L_N，

已知 L_N 由 $\Phi(V_N,L_N)=0$ 求出 V_N，

已知 L_N、V_N 由 $H_{N+1}=W(L_N,V_N)$ 求出 H_{N+1}，

$N=0$，1，2，…在第（2）步通过（16）或（19）式求 V_N 时是解一个非线性矩阵方程。在这一步仍然采用重复迭代的方法将求解过程化为连续解线性方程的过程。这个迭代过程由下式给出

$$V_k(A-BH_kM)+(A-BH_kM)^{\tau}V_k+Q+M^{\tau}H_k^{\tau}RH_kM=0, \quad (20)$$

其中 $$H_k=R^{-1}B^{\tau}V_{k-1}LM^{\tau}(MLM^{\tau})^{-1}, \quad k=1,2,\cdots. \quad (21)$$

第一步仍设 H_0 使 $A-BH_0M$ 的特征根均有负实部。为了与上述的 V_N 区别开来，

这个循环迭代过程采用了序号 K，即用 V_k、H_k 表示。重复迭代，直到 V_k 按给定的精度趋近于某一固定值。

四、初值的选取

在实例计算过程中必然会遇到数值计算的初值选取问题。Binglac[4]提出用一种序列法选取初值。即由全反馈系统出发，依次降低反馈向量的维数，把每一次得到的结果作为下一次的初值，解 $n-m+1$ 个辅助系统来得到初值。这种方法有一定的局限性。有时前一个辅助系统的结果作为下一个系统的初值并不合适。尤其当变量 x_j 所对应的 F 的第 j 列的元相对于 F 的其它元不可忽略时，若在下一次不取这个 x_j 作反馈变量往往会使迭代失败。而当几个 x_j 所对应的 F 中的几列元相对于其它元均比较小时，再用这种方法又显得多余。初值的选取是迭代成功的关键。如果把讨论的问题限制在合理的范围之内，即使得次最优控制规律不要与最优控制规律差得太远，以免造成性能指标的过多损失，这个问题就比较容易解决了。限制的标准是系统的最小范数解使系统稳定。对于许多实际问题来说，这个要求是能够得到满足的。最小范数法[3]得到的反馈阵具有由全反馈得到的最优反馈阵 F^* 中未取作反馈的状态 x_j 所对应的 F 的第 j 列各元为零的形式。

一般我们并不直接选一个 H_0 作初值。由于 $F=HM$，我们总是选一个适当的 F_0 作初值。可以由全反馈出发解 Riccati 方程得到 F^* 作初值。当所不取的状态对应的 F^* 中的第 j 列的元不是比较小时，可取最小范数解作初值。在计算过程中计算机随时打印出每次迭代的误差值，随时可以观察到迭代的收敛情况。

五、一个实例

用电机放大机控制的直流电动机系统如下：

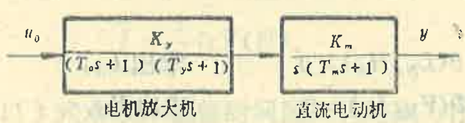

图 1

可以分解成

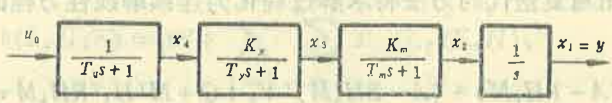

图 2

系统状态方程为

$$\dot{X}=AX+bu,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{T_m} & \frac{K_m}{T_m} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_q} & \frac{1}{T_q}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_y}\end{pmatrix}、b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \frac{K_y}{T_y}\end{pmatrix}.$$

性能指标

$$J=\int_0^{\infty}(X^{\tau}\begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}X+u^2)dt.$$

已知参数为

$T_q=0.096$ 秒，$T_y=0.024$ 秒，$T_m=0.15$ 秒，$K_y=4.8$，$K_m=0.33$ 弧度/秒·伏.

可以看出在设备的输出端引出反馈是比较方便的，因而采用次最优控制．选

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}，即\ Z=MX=\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\end{bmatrix}.$$

计算结果次最优反馈阵 $F^{\circ}=(3.43632\quad 0\quad 0.23896\quad 0)$，$\mathrm{tr}V(F^{\circ})=4.33345$。而全反馈所得的最优性能指标是 $\mathrm{tr}V(F^*)=4.27514$.

六、结　语

本文算法的特点：

1．在求 V_N 的迭代过程中（20）、（21）式在

$$H_kM=R^{-1}B^{\tau}V_{k-1}LM^{\tau}(MLM^{\tau})^{-1}M=R^{-1}B^{\tau}V_{k-1}P$$

中，P 不含下标 k，因此 P 在每次迭代中保持不变，省去了求逆运算，简化了计算．

2．迭代方程中含有多个前面的计算结果 L，因而能充分利用已经得到的新值，加快了收敛速度．在实例计算中比文献〔2〕的快速性得到了证实．特别是当初值离开精确值较远时两种算法的差别尤为显著．

参考文献

〔1〕 Kleinman, D. L. and Athans, M., The Design of Suboptimal Linear Time-Varying Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**13**, (1968), 150-159.

〔2〕 Levine, W. S. and Athans, M., On the Determination of Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**15**, (1970), 44-48.

〔3〕 R. L. Kosut, Suboptimal Control of Time-Invariant Systems Subject to Control Structure Constraints, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**15**, (1970), 557-563.

〔4〕 Bingulac, S. P., N. M. Ċuk and M. S. Ċalovic, Sequential Algorithm for Calculation of Optimal Output-Constrained Regulators, in Proc., **11** th Annu. Conf. Circuit and System Theory, Oct. 3-5, (1973), Paper Ⅲ B.4.

AN ALGORITHM OF SUBOPTIMAL CONTROL OF LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS

Li Shusheng, Wu Shueman

(Anshan institute of iron and steel engineering)

Abstract

The paper considers the problem of numerical calculation of suboptimal feedback regulators with infinite terminal time for time-invariant systems. An algorithm is presented and the initial guess of the iterations is discussed. The advantages about the algorithm are stated in terms of examples.