第3卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No.2
1986年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1986

关于任意反馈结构下的固定模

施志诚　　高为炳

（北京航空学院）

摘　　要

本文讨论了当分散控制系统存在分散固定模时如何增加关联反馈项，使在新的反馈结构下无固定模，且使增加的关联反馈项尽可能少或满足一些特性的问题。为此我们得到了一些充要条件。

一、引　　言

设所考虑的系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}}(t)=A\mathrm{x}(t)+\sum\limits_{i=1}^{n} B_i\mathrm{u}_i(t), \\ \mathrm{y}_i(t)=C_i\mathrm{x}(t) \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{cases} \tag{1}$$

称为具n个通道的分散控制系统。其中：$\mathrm{x}(t)\in \mathrm{R}^l$，$\mathrm{u}_i(t)\in\mathrm{R}^{p_i}$，$\mathrm{y}_i(t)\in\mathrm{R}^{q_i}$，$i=1,2,\cdots,n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=p$，$\sum\limits_{i=1}^{n}q_i=q$。记　$B=[B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n]$，$C=[C_1^T,\ C_2^T,\cdots,C_n^T]^T$。

1973年，Wang 和 Davison 做出了开创性的工作，引入了分散固定模的概念。

定义 1[1]　记 $\mathrm{F}=\{F=\mathrm{diag}\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}\in\mathrm{R}^{p\times q}|F_i\in\mathrm{R}^{p_i\times q_i},\ i=1,2,\cdots,n\}$，$\Lambda(C,A,B,\mathrm{F})=\bigcap\limits_{F\in\mathrm{F}}\sigma[A+BFC]$ 称为系统（1）的分散固定模。其中$\sigma(\cdot)$表示谱集。

定理 1[1]　系统（1）可以采用动态分散反馈控制器镇定的充要条件是：$\Lambda(C,A,B,\mathrm{F})\subset\mathrm{C}^-$。

1976年，Corfmat 和 Morse 进一步发展了这一理论，并给出了具体构造动态分散

本文于1984年8月9日收到。1985年6月25日收到修改稿。

反馈控制器的方法[2,3].

1981年，Anderson 和 Clements 用代数方法得到:

定理 2[4] 记 $\mathrm{N}=\{1, 2, \cdots, n\}$，$\mathrm{S}=\{i_1, i_2, \cdots, i_s\}\subset \mathrm{N}$，$1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le n$，$\mathrm{S}^\perp=\mathrm{N}-\mathrm{S}$，$B_S=[B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_s}]$，$C_S=[C_{i_1}^T, C_{i_2}^T, \cdots C_{i_s}^T]^T$，则 $\Lambda(C,A,B,\mathrm{F})=\phi$ 的充要条件是：对任意 $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{N}$，

$$\min_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda I_l-A & B_S\\ C_{S^\perp} & 0\end{bmatrix}\ge l$$

我们下面的工作就是解决当系统（1）存在分散固定模时如何增加关联反馈项，使在新的反馈结构下无固定模，且使增加的关联反馈项尽可能少或满足一些特性的问题.

二、主要结果

记 $\mathrm{E}=\{E(e_{ij})\in\mathrm{R}^{n\times n}|e_{ij}\in\{0,1\}, e_{ii}=1, i,j=1, 2, \cdots, n\}$，$E_{\alpha\beta}=(e_{ij})\in\mathrm{R}^{n\times n}$，$\alpha\neq\beta$，$e_{ij}=\begin{cases}1 & i=j \text{ 或 } i=\alpha, j=\beta\\ 0 & \text{其它情况}\end{cases}$，$E_{\alpha\beta}\in\mathrm{E}$.

对任意 $F\in\mathrm{R}^{p\times q}$，将 F 记成分块形式，

$$F=\begin{pmatrix}F_{11}, F_{12}, & \cdots, & F_{1n}\\ F_{21}, F_{22}, & \cdots, & F_{2n}\\ & \cdots\cdots & \\ F_{n1}, E_{n2}, & \cdots, & F_{nn}\end{pmatrix},$$

其中 $F_{ij}\in\mathrm{R}^{p_i\times q_i}$，$i,j=1, 2, \cdots, n$.

对任意 $E\in\mathrm{E}$，记：

$$F_E=\begin{pmatrix}e_{11}F_{11}, & e_{12}F_{12}, & \cdots, & e_{1n}F_{1n}\\ e_{21}F_{21}, & e_{22}F_{22}, & \cdots, & e_{2n}F_{2n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ e_{n1}F_{n1}, & e_{n2}F_{n2}, & \cdots, & e_{nn}F_{nn}\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{F}_E=\{F_E|\forall F\in\mathrm{R}^{p\times q}\}.$$

定义 2 设 $E\in\mathrm{E}$，则记：$\Lambda(C,A,B,\mathrm{F}_E)=\bigcap_{F_E\in\mathrm{F}_E}\sigma(A+BF_EC)$，称为系统(1)在反馈结构 E 下的固定模.

1981年，Sezer 和 Siljak 得到:

对系统（1）及 $E\in\mathrm{E}$，考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{B}_j \widetilde{u}_j(t), \\ y_i(t) = C_i x(t), \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\widetilde{B}_j = [B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots]$，$\widetilde{u}_j(t) = [u^T_{j_1}(t), u^T_{j_2}(t), \cdots]^T$，$\{i_1, i_2, \cdots\} = I_j = \{i \in \mathrm{N} | e_{ij} = 1\}$，$j = 1, 2, \cdots, n$。$\widetilde{B} = [\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \cdots, \widetilde{B}_n]$。

定理3[5] 设$E \in \mathbf{E}$，则下列条件等价

(i) 系统（1）在反馈结构 E 下无固定模；

(ii) 系统（2）无分散固定模。

因而，当 $E \in \mathbf{E}$ 给定，我们可以通过判断系统（2）是否有分散固定模而得到系统（1）在反馈结构E下是否有固定模。下面我们讨论当给定系统（1）可控可观但有分散固定模时如何确定 $E \in \mathbf{E}$，使 $\Lambda(C, A, B, \mathrm{F}_E) = \phi$ 的问题。

为了方便，记 设 S_1、$\mathrm{S}_2 \subseteq \mathrm{N}$，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{S}_1 \\ \mathrm{S}_2 \end{pmatrix} = \min_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_l - A & B_{\mathrm{S}_1} \\ C_{\mathrm{S}_2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \left\{ \mathrm{S} \subset \mathrm{N} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \mathrm{S} \\ \mathrm{S}^{\perp} \end{pmatrix} < l \right\}.$$

显然当系统（1）可控可观但具有分散固定模时，由定理2知：$\Phi \neq \phi$。

对任意$E \in \mathbf{E}$，记：$IJ_E = \{(i,j) | i \neq j$且$e_{ij} = 1\}$。若$(\alpha_1, \alpha_2)$、$(\alpha_2, \alpha_3) \in IJ_E$，$\alpha_1 \neq \alpha_3$，则称$(\alpha_1, \alpha_2)$、$(\alpha_2, \alpha_3)$组成了一个链。若还有$(\alpha_1, \alpha_3) \in IJ_E$，则称$(\alpha_1, \alpha_2)$、$(\alpha_2, \alpha_3)$为闭链，否则称为开链。

定理4 设 $E \in \mathbf{E}$，则$\Lambda(C, A, B, \mathrm{F}_E) = \phi$ 的充要条件是：系统（1）可控可观且对 E 的任一开链（α_1，α_2）、（α_2，α_3）$\in IJ_E$及任一 $\mathrm{S} \subset \mathrm{N}$，$\mathrm{S} \supseteq \{\alpha_3\}$，$\mathrm{S} \cap \{\alpha_1, \alpha_2\} = \phi$，有

$$\begin{pmatrix} \mathrm{S} \cup T_s \\ \mathrm{S}^{\perp} \end{pmatrix} \geq l.$$

其中 $T_{\mathrm{S}} = \{i | (i, j) \in IJ_E, i \in \mathrm{S}^{\perp}, j \in \mathrm{S}\}$。

证 对任意$\mathrm{S} \subset \mathrm{N}$，$\mathrm{S} \neq \phi$，设：$\widetilde{B}_{\mathrm{S}} = [B_{\mathrm{S}}, B_{\mathrm{S}1}]$，$\mathrm{S}_1 \subseteq \mathrm{S}^{\perp}$，记$\mathrm{S}_2 = \mathrm{S}^{\perp} - \mathrm{S}_1$，则：

$$L_{\mathrm{S}} \triangleq \min_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_l - A & \widetilde{B}_{\mathrm{S}} \\ C_{\mathrm{S}^{\perp}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{S} \cup \mathrm{S}_1 \\ \mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2 \end{pmatrix}$$

且：对任意 $j \in \mathrm{S}$，$i \in \mathrm{S}_2$，有 $e_{ij} = 0$。

对任意 $i \in \mathrm{S}_1$，存在 $j \in \mathrm{S}$，有 $e_{ij} = 1$。

下面分三种情况进行讨论。

(i) 若 $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}^{\perp}$，由系统（1）可控立得：$L_{\mathrm{S}} \geq l$，

(ii) 若$S_1=\phi$，则必有$S\overline{\in}\Phi$，$L_S\geq l$；

(iii) 若$S_1\neq\phi$，$S_1\neq S$，记$S_0=\{j\in S_1|e_{ij}=0$，对$\forall i\in S_2\}$，则令$\overline{S}=S\cup S_0$，$\overline{S}_1=S_1-S_0$，$\overline{S}_2=S_2$。注意到：对$\forall\alpha_1\in\overline{S}_2$，$\forall\alpha_3\in\overline{S}$，有$e_{\alpha_1\alpha_3}=0$；对$\forall\alpha_2\in\overline{S}_1$，$\exists\alpha_3\in\overline{S}$，有$e_{\alpha_2\alpha_3}=1$；对$\forall\alpha_2\in\overline{S}_1$，$\exists\alpha_1\in\overline{S}_2$，有$e_{\alpha_1\alpha_2}=1$。$\therefore(\alpha_1,\alpha_2)$、$(\alpha_2,\alpha_3)\in II_E$为一开链。又由$\overline{S}\supseteq\{\alpha_3\}$，$\overline{S}\cap\{\alpha_1,\alpha_2\}=\phi$，$\overline{S}_1=T_{\overline{S}}$，从而：

$$L_S=\begin{pmatrix}S\cup S_1\\ S_1\cup S_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{S}\cup\overline{S}_1\\ \overline{S}_1\cup\overline{S}_2\cup S_0\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}\overline{S}\cup T_{\overline{S}}\\ \overline{S}\end{pmatrix}\geq l.$$

∴必要条件得到。同理易证充分条件。

定理 5 若$\Phi=\{S_1,S_2,\cdots,S_t\}$，且$\bigcap\limits_{k=1}^{t}S_k\neq\phi$，$\bigcup\limits_{k=1}^{t}S_t\neq N$，则对任意$i_0\in N-\bigcup\limits_{k=1}^{t}S_k$，$j_0\in\bigcap\limits_{k=1}^{t}S_k$，均有

$$\Lambda(C,A,B,F_{E_{i_0j_0}})=\phi.$$

证 对$E_{i_0j_0}$考虑系统(2)，这时，$\overline{B}_{j_0}=[B_{i_0},B_{j_0}]$，$\tilde{B}_j=B_j$，$j\neq j_0$，$j=1,2,\cdots\cdots,n$。对任意$S\subset N$：

(i) 若$j_0\overline{\in}S$或$i_0,j_0\in S$，则$S\overline{\in}\Phi$，

$$\therefore\quad L_S=\begin{pmatrix}S\\ S^{\perp}\end{pmatrix}\geq l;$$

(ii) 若$j_0\in S$且$i_0\overline{\in}S$，则由$\{i_0\}\cup S\overline{\in}\Phi$，

$$\therefore\quad L_S=\begin{pmatrix}\{i_0\}\cup S\\ S\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}\{i_0\}\cup S\\ [\{i_0\}\cup S]^{\perp}\end{pmatrix}\geq l.$$

由定理2、定理3得到结论。

对于一般情况：设

$$\Phi=\{S_{11},\cdots,S_{1t_1},S_{21}\cdots,S_{2t_2},\cdots,S_{m1},\cdots,S_{mt_m}\},\tag{3}$$

且m是满足：$\bigcap\limits_{r=1}^{t_k}S_{kr}\neq\phi$，$\bigcup\limits_{r=1}^{t_k}S_{kr}\neq N$，$k=1,2,\cdots,m$的最小正整数。取$i_k\in N-\bigcup\limits_{r=1}^{t_k}S_{kr}$，$j_k\in\bigcap\limits_{r=1}^{t_k}S_{kr}$，$k=1,2,\cdots,m$。由定理4可以想象到：$E_{i_kj_k}$，$k=1,2,\cdots,m$与使$\Lambda(C,A,B,F_E)=\phi$的$E$有某种关系。为此再引入一些符号：

设 $E_r=\left(e_{ij}^{(r)}\right)\in \mathsf{E}$，$r=1, 2$，记 $E_1+E_2=\overline{E}=\left(\overline{e}_{ij}\right)$，

$$\overline{e}_{ij}=\begin{cases}0 & \text{若}\, e_{ij}^{(r)}=0,\ r=1,\ 2,\\ 1 & \text{其它情况}.\end{cases}$$

记 $E_1-E_2=\widetilde{E}=(\widetilde{e}_{ij})$，

$$\widetilde{e}_{ij}=\begin{cases}0 & \text{若}\ e_{ij}^{(1)}=0\,\text{或}\,e_{ij}^{(r)}=1,\ r=1,\ 2,\ \text{且}\,i\neq j,\\ 1 & \text{其它情况}.\end{cases}$$

显然 E_1+E_2，$E_1-E_2\in \mathsf{E}$.

记 $IJ_E^*=\{(i,\ j)\mid (i,j)\in IJ_E\,\text{或}\,\exists k\in \mathsf{N},(i,\ k),(k,j)\in IJ_E\}$. 令$E^{(1)}=\left(e_{ij}^{(1)}\right)$，其中

$$e_{ij}^{(1)}=\begin{cases}1 & \text{当}\ i=j\,\text{或}\,(i,j)\in IJ_E^*,\\ 0 & \text{其它情况}.\end{cases}$$

显然 $E^{(1)}\in \mathsf{E}$，且 $IJ_{E^{(1)}}=IJ_E^*\supseteq IJ_E$. 同理，对$E^{(1)}$，定义 $E^{(2)}=\left(e_{ij}^{(2)}\right)$，

$$e_{ij}^{(2)}=\begin{cases}1 & \text{当}\,i=j\ \text{或}\,(i,j)\in IJ_{E^{(1)}}^*,\\ 0 & \text{其它情况}.\end{cases}$$

显然 $E^{(2)}\in \mathsf{E}$，且 $IJ_{E^{(2)}}=IJ_{E^{(1)}}^*\supseteq IJ_{E^{(1)}}\supseteq IJ_E$. 如此下去，可以定义 $E^{(3)}$，$E^{(4)}$，…，且必存在k，使得 $IJ_{E^{(k+1)}}=IJ_{E^{(k)}}^*=IJ_{E^{(k)}}\supset IJ_{E^{(k-1)}}\supset\cdots\supset IJ_E$.记 $\overline{E}=E^{(k)}$，显然 $\overline{E}\in \mathsf{E}$，且 $IJ_E^*=IJ_{\overline{E}}\supseteq IJ_E$.

记 $\mathsf{E}_\phi=\{E\in \mathsf{E}\mid \Lambda(C,A,B,\mathsf{F}_E)=\phi\}$.

定义 3 若 $E\in \mathsf{E}_\phi$，且对任意 $E_\Delta\in \mathsf{E}$，$IJ_{E_\Delta}\subset IJ_E$，必有 $E_\Delta\overline{\in} \mathsf{E}_\phi$，则称$E$为$\mathsf{E}_\phi$的一个极小元.

定理 6 Φ如(3)所示，$E=\sum\limits_{k=1}^{m}E_{i_kj_k}$,则:

(i) $\overline{E}\in \mathsf{E}_\phi$;

(ii) 若 $E\in \mathsf{E}_\phi$，则E为E_ϕ的一个极小元;

(iii) 若开链(α_1,α_2)、$(\alpha_2$、$\alpha_3)\in IJ_E$，存在 $\mathsf{S}\subset \mathsf{N}$，$\mathsf{S}\supseteq\{\alpha_3\}$，$\mathsf{S}\cap\{\alpha_1,\alpha_2\}=\phi$，有: $\begin{pmatrix}\mathsf{S}\cup T_{\mathsf{S}}\\ \mathsf{S}\end{pmatrix}<l$,

则存在 $E_1\in \mathsf{E}$，有$IJ_{E_1}=IJ_E\cup\{(\alpha_1,\alpha_3)\}$. 如果 $E_1\overline{\in} \mathsf{E}_\phi$，用类似的方法可得 E_2，如

此下去，存在$E_0\in \mathbf{E}_\phi$，满足 $IJ_E\subset IJ_{E_1}\subset\cdots\subset IJ_{E_0}\subseteq IJ_{\bar{E}}$.

(iv) 若$E_a\in \mathbf{E}_\phi$，$IJ_{E_a}\supset IJ_F$，且存在一个闭链$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_2,\alpha_3)\in IJ_{E_a}$，满足：对任意$S\subset N$，$S\supseteq\{\alpha_3\}$，$S\cap\{\alpha_1,\alpha_2\}=\phi$，有$\begin{pmatrix} S\cup T_s \\ S^{\perp} \end{pmatrix}\geq l$，则存在$E_b\in \mathbf{E}$，$IJ_{E_b}=IJ_{E_a}-\{(\alpha_1,\alpha_3)\}$，有 $E_b\in \mathbf{E}_\phi$.

定理6的证明由定理4、定理5不难得到.

由以上结论可以得到求E_ϕ中的一个极小元E_*的方法：

步骤1 由（5）得到$E=\sum\limits_{k=1}^{m} E_{i_k j_k}$，

步骤2 由定理6(iii)得到$E_0\in \mathbf{E}_\phi$；

步骤3 由定理6(iv)得到极小元E_*.

容易看出，以上步骤是可以用计算机进行运算的.

有时我们也并不以求出$\mathbf{E}_\phi$的一个极小元为最佳，而是还要满足一些附加的条件，用以上方法也是可以得到的.

值得提及的是，当我们找到E，使系统（1）在反馈结构E下无固定模，则类似于〔3〕中的结果，存在反馈结构E下的动态控制器，使闭环系统任置极点.

例 考虑系统[6]

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}u_1(t)+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}u_2(t)+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}u_3(t)\\ y_1(t)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}x(t)\\ y_2(t)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}x(t)\\ y_3(t)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}x(t)\end{cases} \tag{4}$$

容易验证，系统（4）可控可观，但由于$\Phi=\{\{2,3\}\}$，所以存在分散固定模.由定理5立得：$\Lambda(C,A,B,F_{E_{12}})=\phi$，$\Lambda(C,A,B,F_{E_{13}})=\phi$. 显然$E_{12}$，$E_{13}$均为极小元.

参 考 文 献

[1] Wang, S. H. and Davison, E. J., On the Stabilization of Decentralized Control Systems, IEEE Trans., AC-18, 5, (1973), 473-478.

[2] Corfmat, J. P. and Morse, A. S., Control of Linear Systems through Specified Input Channels, SIAM J. Control and Optim., **14**, 1, (1976), 163-175.

[3] Corfmat, J. P. and Morse, A. S., Decentralized Control of Linear Multivariable Systems, Automatica, **12**, (1976), 479-495.

[4] Anderson, B. D. O. and Clements, D. J., Algebraic Characterization of Fixed Modes in Decentralized Control, Automatica, **17**, 5, (1981), 703-712.

[5] Sezer, M. E. and Siljak, D. D., On Structurally Fixed Modes, Proc. IEEE. Sympo. Circ. Sys., (1981), 558-565.

[6] Wang, S. H., An Example in Decentralized Control Systems, IEEE Trans., AC-**23**, 5, (1978), 938.

ON FIXED MODES UNDER ARBITRARY FEEDBACK STRUCTURE

Shi Zhicheng, Gao Weibin

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

The paper discusses the problem how to add interconnected feedback terms When a decentralized control system has decentralized fixed modes, so that there are no fixed modes under new feedback structure and the additional interconnected feedback terms either are as few as possible or meet some needs. Some sufficient and necessary conditions are obtained.