第3卷 第2期 控制理论与应用 Vol.3, No.2
1986年6月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS June, 1986

天气系统的建模与预报

韩 志 刚

（黑龙江大学）

摘 要

本文讨论了天气系统预报模型的建模和预报问题．说明了由于有了多层递阶预报方法，所以使得具有时变参数的线性预报模型在预报问题中具有一定的普遍性．并给出了应用效果的报告．

一、天 气 系 统

天气系统是一个十分复杂的大系统．各种天气要素可以看成这个系统的输出，而该系统由太阳直接或间接获得的能量以及从其它方面所获得的能量，可以看成是这个系统的输入．在气象学中，描写天气系统状态变化，往往是用一组流体—热力、动力学方程．它们是一组偏微分方程．求得这一组偏微分方程的解析解，目前几乎是不可能的．所以在应用中，人们往往要靠大型计算机来求它们的数值解．但由于我们目前还受到种种技术和经济条件的限制，所以对该方程组的某些初始条件或边界条件的观测，还很不完善；另一方面，在方程组的建立过程中，我们曾不得不忽略某些因素，以使它们理想化，所以这些方程不能说是完全精确的．这就使所得到的数值解本身具有了某些先天性的不足．这必然会对它的应用带来不利的影响．

根据气象学的分析，应用流体—热力、动力学方程，对天气系统进行分析和预报，其有效期间，仅为一周左右．这说明，如果不对这一组方程进行适当的补充、完善以及其它必要的工作，那么企图用这一组方程进行长期天气预报，就目前的情况来说，几乎是不可能的．

然而，天气系统的变化是有其一定的规律的．例如，某些天气现象的周期和韵律的存在，就是这种规律的表现．这种规律往往隐藏在随机现象之中，只要我们能够正确的发现它，描述它，就会对长期天气预报工作有所帮助．发现随机现象的规律性，需要有大量的观测数据．正好，天气学工作者通过他们逐年的工作，已积累了大量的有关数据．这就使得我们从统计的观点来揭示天气系统的某些规律成为了可能．

在我们的工作中，基于上述种种原因，把天气系统看成是一种时变的复杂动态系统．我们的目的是要解决天气系统的预报问题，所以要从天气系统的建模开始．

本文于1984年10月30日收到．1985年9月11日收到修改稿．

我们发现，尽管长期天气预报是一个复杂的问题，但作为预报对象的研究，以天气系统为背景，是有一定的启发性的。

二、天气系统的预报模型

实际上，天气系统是一个连续时间系统，然而当对它进行预报时，我们所感兴趣的是某些天气要素在某一天，某一个月，某一个季的累积值或平均值或在某一时刻的瞬时值。而观测资料，许多也是用此种方式记录的。所以，我们把天气系统看成是一个离散时间系统。

用 $y(k)$ 表示 k 时刻某些天气要素形成的向量，即它是天气系统在 k 时刻的某个输出。为方便计，我们称其为预报量。显然 $\{y(k)\}$ 将形成一个时间序列。与 $y(k)$ 有关的某些天气要素，我们把它们记成向量 $u(k)$。它的变化决定了 $y(k)$ 的变化。所以称其为预报因子。$u(k)$ 一般的不一定是天气系统的全部输入。但对于以 $y(k)$ 为输出的这个子系统而言，我们却可以把 $u(k)$ 看成是输入。但这个输入与一般的控制系统的输入不同，它仅是一个可观测的随机过程，不能随意使其变化规律发生改变。

置

$$\mathsf{Y}_{k-1}=\{y(0),\ y(1),\ \cdots,\ y(k-1)\},$$
$$\mathsf{U}_k=\{u(0),\ u(1),\ \cdots,\ u(k)\},$$

则关于天气要素的向前一步的预报模型的一般形式可以写成：

$$y(k)=f[\mathsf{Y}_{k-1},\ \mathsf{U}_k,\ \theta(k),\ k]+v(k),$$

其中 $v(k)$ 是随机噪声。$\theta(k)$ 是 m 维的时变参数，$f[\ ,\ ]$ 一般的是一个非线性函数。在建模过程中，一般的希望 $v(k)=\epsilon(k)$ 是零均值的白噪声。根据本文第四部分所提出的理由，在实际应用中，我们只要考虑如下的两类模型就可以了：

1） 无输入模型

对于某些天气要素，与之有关的其它因素尚不清楚，或不十分清楚。此时，对于它们的预报可以采用无输入的 AR 模型或 ARMA 模型。即：

$$y(k)+A_1(k)y(k-1)+\cdots+A_p(k)y(k-p)=\epsilon(k).$$

或者是：

$$\begin{aligned}y(k)+A_1(k)y(k-1)+\cdots+A_p(k)y(k-p)&=e(k)\\&+C_1(k)\epsilon(k-1)+\cdots+C_q(k)\epsilon(k-q),\end{aligned}$$

其中，$A_1(k)$，$\cdots$，$A_p(k)$，$C_1(k)$，$\cdots$，$C_q(k)$ 是参数矩阵，$\epsilon(k)$ 是零均值的白噪声。p 和 q 是模型的阶数。

2） 有输入模型

对于一些天气要素的预报而言，与之有关的重要因素（预报因子）已比较清楚。此时，可以建立如下的有输入的预报模型：

$$\begin{aligned}&y(k)+A_1(k)y(k-1)+\cdots+A_p(k)y(k-p)\\&=B_0(k)u(k)+\cdots+B_q(k)u(k-q)+e(k).\end{aligned}$$

或者是

$$y(k)+A_1(k)y(k-1)+\cdots+A_p(k)y(k-p)=B_0(k)u(k)+\cdots+B_n(k)u(k-n)+e(k)+C_1(k)e(k-1)+\cdots+C_q(k)e(k-q),$$

其中 $A_1(k)$，…，$A_p(k)$，$B_0(k)$，…，$B_n(k)$，$C_1(k)$，…，$C_q(k)$ 皆为参数矩阵。$e(k)$ 是零均值的白噪声。p、q，n 为模型的阶数。

应特别指出的是：天气要素的观测值已经是与之有关的诸因素综合作用的结果，即 $y(k)$ 已包含诸因素的作用在其中了。如果我们把某种不重要的因素错误的作为重要因素加入到预报模型中，这无疑将增大这一因素的作用，从而可能导致不应有的结果。所以此时还是考虑无输入的模型为好。

三、参数估值算法的修正

根据文献〔1〕，不妨仅考虑广义的单输出模型，所以对于一般情形，我们有：

$$y(k)=f[\mathrm{Y}_{k-1},\ \mathrm{U}_k,\ \theta(k),\ k]+v(k).$$

此时，$y(k)$是一维的输出，$f[\ ,\ ]$的结构为已知。我们将依据后验残差一致小准则对模型的参数进行估计，这样得出的预报模型，将可能减少预报误差（详细的讨论可参看〔3〕）。依据上述准则，在文献〔1〕和〔2〕中，我们得到了如下的估值公式：

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+\frac{\delta}{\|\nabla_\theta f[k,\hat{\theta}(k-1)]\|^2}\nabla_\theta f[k,\ \hat{\theta}(k-1)]\{y(k)-f[\mathrm{Y}_{k-1},\ \mathrm{U}_k,\ \hat{\theta}(k-1),\ k]\}, \tag{A}$$

其中 $\hat{\theta}(k)$表示$\theta(k)$的估值，而

$$\nabla_\theta f[k,\hat{\theta}(k-1)]=\frac{\partial}{\partial\theta}f[\mathrm{Y}_{k-1},\mathrm{U}_k,\theta,k]\Big|_{\theta=\hat{\theta}(k-1)},$$ δ是适当确定的常数。

在文献〔1〕中我们证明了，在较一般的条件下，对于任意的$\varepsilon>0$，可以找到δ和$N>0$，使得当$k\geq N$时，由上述算法所确定的$\hat{\theta}(k)$恒满足

$$|y(k)-f[\mathrm{Y}_{k-1},\ \mathrm{U}_k,\ \hat{\theta}(k),\ k]|<\varepsilon\quad a.s.\ .$$

我们把由算法（A）所确定的估值，称为在预报意义下模型的最佳估值。

在实际应用中，经常遇到的是下述形式的模型：

$$y(k)+a_1(k)y(k-1)+\cdots+a_n(k)y(k-n)=b_0(k)u(k)+b_1(k)u(k-1)+\cdots+b_m(k)u(k-m)+e(k).$$

此处不妨设输入$u(k)$也是一维的。$a_1(k)$，…，$a_n(k)$，$b_0(k)$，…，$b_m(k)$皆为时变参数。

如果置：

$$\varphi(k)=[-y(k-1),\ \cdots,\ -y(k-n),\ u(k),\ \cdots,\ u(k-m)]^{\tau}$$

$$\theta(k)=[a_1(k),\ \cdots,\ a_n(k),\ b_0(k),\ b_1(k),\ \cdots,\ b_m(k)]^{\tau},$$

则有

$$y(k)=\varphi(k)^{\tau}\theta(k)+e(k)。$$

对于这种情形，参数估值公式（A）变成了

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+\frac{\delta}{\|\varphi(k)\|^{2}}\varphi(k)\{y(k)-\varphi(k)^{\tau}\hat{\theta}(k-1)\},\qquad (B)$$

此时 δ 的"最佳值"是1。

由算法（B）所确定的估值与初值有关。这虽然不会影响预报结果的精度，但总还是一种欠缺。为克服这一点，我们引入如下的选择初值的准则函数：

$$J[\hat{\theta}(0)]=\sum_{k=1}^{M}\|\hat{\theta}(k)-\hat{\theta}(k-1)\|^{2},$$

M 是观测的终止时刻。在应用中，我们仅需选取初值 $\hat{\theta}(0)$，使得有：

$$J[\hat{\theta}(0)]=\min_{\theta(0)}J[\theta(0)]。$$

我们称这样的初值 $\hat{\theta}(0)$ 为最佳初值。相应的估值序列为最佳的估值序列。显然这种方法只能离线的应用。但只要注意到

$$\hat{\theta}(k)-\hat{\theta}(k-1)=\frac{1}{\|\varphi(k)\|^{2}}\varphi(k)\{y(k)-\varphi(k)^{\tau}\hat{\theta}(k-1)\}.$$

所以：

$$J[\hat{\theta}(0)]=\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{\|\varphi(k)\|^{2}}\|y(k)-\varphi(k)^{\tau}\hat{\theta}(k-1)\|^{2}.$$

如果参数 $\theta(k)=\theta$ 是非时变的，用估值 $\hat{\theta}$ 代替 $\hat{\theta}(k-1)$，则有：

$$J[\hat{\theta}(0)]=\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{\|\varphi(k)\|^{2}}\|y(k)-\varphi(k)^{\tau}\hat{\theta}\|^{2}.$$

由此可见，算法（B）满足 $J[\hat{\theta}(0)]=\min$，与最小二乘法之间存在着一定的联系。为了使得上述方法能够在线的应用，我们用递推最小二乘法代替 $J[(\hat{\theta})]=\min$。故得出如下的修正算法（C）：

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}_{1}(k)+\frac{1}{\|\varphi(k)\|^{2}}\varphi(k)\{y(k)-\varphi(k)^{\tau}\hat{\theta}_{1}(k)\},$$

$$\hat{\theta}_{1}(k)=\hat{\theta}_{1}(k-1)+\frac{p(k-1)\varphi(k)}{\lambda_{k}+\varphi(k)\ p(k-1)\varphi(k)}\{y(k)-\varphi(k)^{\tau}\hat{\theta}_{1}(k-1)\},$$

$$p(k)=\frac{1}{\lambda_{k}}\left[I-\frac{p(k-1)\varphi(k)}{\lambda_{k}+\varphi(k)\ p(k-1)\varphi(k)}\varphi(k)^{\tau}\right]p(k-1),\qquad (C)$$

其中 λ_k 是遗忘因子.

这组算法既具备了算法（B）的特征，又消除了初值的影响.

作为例子考虑模型

$$y(k)=\alpha_1(k)y(k-1)+\alpha_2(k)y(k-2)+e(k)$$

的参数估计问题. 其中 $\alpha_1(k)$, $\alpha_2(k)$ 是未知参数. 我们依据相同的观测数据，采用不同的初值，应用修正算法（C），得出了参数的递推估值，如下表所示. 可以看出，参数估值已不受初值选取的影响了.

k	初 值	1	2	3	4	…	26	27
$\hat{\alpha}_1(k)$	10	1.78381	.774311	1.48839	1.04729	…	.759922	.548813
$\hat{\alpha}_2(k)$	5	-1.09464	.26628	-.420199	-.0468229	…	.538382	.296947
$\hat{\alpha}_1(k)$	0	.626889	.774302	1.48839	1.04729	…	.759922	.548813
$\hat{\alpha}_2(k)$	0	.465016	.266288	-.420199	-.0468239	…	.538382	.296947
$\hat{\alpha}_1(k)$	-1	-1.16354	.774299	1.48839	1.04729	…	.759922	.548813
$\hat{\alpha}_2(k)$	3	2.87869	.266292	-.420201	-.0468252	…	.538382	.296947

四、预报模型的线性化

目前，对于非线性模型已有的线性化方法都难免具有局部性特征. 这对于长期天气预报的应用，即大步长的预报问题而言，当然是不利的. 因而希望能有一个具有整体性特征的线性化方法. 注意到，预报问题的求解，往往只涉及动态系统的一条轨线. 这使得寻求大范围的线性化，具有了一定的可能. 下面所介绍的就是属于大范围线性化的一个途径.

设 $u(k)$ 是系统的输入，$y(k)$ 是与之相应的输出，则序列 $\{(y(k),\ u(k)\}$ 称为该系统的一条轨线. 如果系统是无输入的，那么 $\{y(k)\}$ 即称为它的一条轨线.

定义 设 S_1 是一个非线性（预报模型）系统，$\{S_2(\alpha):\alpha\in A\}$ 是一族线性（预报模型）系统，如果对于 S_1 任一条轨线 $\{(y(k),\ u(k))\}$，皆有 $\{S_2(\alpha):\alpha\in A\}$ 中的一个系统（模型）$S_2(\alpha_0)$，使得它的一条轨线恰恰是 $\{(y(k),\ u(k))\}$，则说系统（模型）S_1 嵌入到系统（模型）族 $\{S_2(\alpha);\ \alpha\in A\}$ 之中.

对于无输入系统，也有相同的定义.

可以证明如下的关于预报模型线性化的定理：

定理 对于非线性的预报模型 S_1:

$$y(k)=f[\mathrm{Y}_{k-1},\ \mathrm{U}_k,\ \theta(k),\ k]+v(k),$$

总可以找到如下形式的一族预报模型$\{S_2\}$：

$$y(k)=\alpha_1(k)y(k-1)+\cdots+\alpha_n(k)y(k-n)+\beta_0(k)u(k)+\cdots$$
$$+\beta_m(k)u(k-m)+v(k),$$

使得S_1嵌入到$\{S_2\}$之中。

证 设$\{(y_*(k),\ u_*(k))\}$是S_1的任一条轨线，即有：

$$y_*(k)=f[Y^*_{k-1},\ U^*_k,\ \theta(k),\ k]+v(k),$$

其中

$$Y^*_{k-1}=\{y_*(0),\ y_*(1),\ \cdots,\ y_*(k-1)\},$$

$$U^*_k=\{u_*(0),\ u_*(1),\ \cdots,\ u_*(k)\}.$$

置：

$$\varphi(k)=[y(k-1),\ \cdots,\ y(k-n),\ u(k),\ \cdots,\ u(k-m)]^\tau,$$

$$\eta(k)=[\alpha_1(k),\ \cdots,\ \alpha_n(k),\ \beta_0(k),\ \beta_1(k),\ \cdots,\ \beta_m(k)]^\tau.$$

于是所寻求的模型的形式变成了：

$$y(k)=\varphi(k)^\tau\eta(k)+v(k),$$

而需证的是，存在这样的$\eta^*(k)$，使得：

$$y_*(k)=\varphi_*(k)^\tau\eta^*(k)+v(k),$$

其中

$$\varphi_*(k)=[y_*(k-1),\ \cdots,\ y_*(k-n),\ u_*(k),\ \cdots,\ u_*(k-m)]^\tau.$$

为此取：

$$\beta(k)=\beta(k-1)+\frac{1}{\|\varphi_*(k)\|^2}\varphi_*(k)\{y_*(k)-\varphi_*(k)^\tau\beta(k-1)\}$$

$\beta(0)$任意。则有：

$$\varphi_*(k)^\tau\beta(k)=\varphi_*(k)^\tau\beta(k-1)+\varphi_*(k)^\tau\frac{1}{\|\varphi_*(k)\|^2}\varphi^*(k)\{y_*(k)-\varphi_*(k)^\tau\beta(k-1)\}$$

$$=\varphi_*(k)^\tau\beta(k-1)+y_*(k)-\varphi_*(k)^\tau\beta(k-1)=y_*(k).$$

于是只要令：

$$\eta^*(k)=\beta(k)-\frac{1}{\|\varphi_*(k)\|^2}\varphi_*(k)v(k),$$

则就有：

$$y_*(k)=\varphi_*(k)^\tau\eta^*(k)+v(k).$$

这就是所需证明的。 证毕。

需要注意的是，系统族$\{S_2\}$中模型的参量$\eta(k)$是随机的。但这对于预报问题的求解并不会有本质性的影响。

此外，模型族$\{S_2\}$中模型的阶数n和m是具有一定的任意性的。它可以依据模型

S_1的性质来确定. 也可以假定$m=n$, 置

$$J(n)=\sum_{k=1}^{M}\|\eta^*(k)-\eta^*(k-1)\|^2,$$

M是观测数据的终止时刻, 于是取n使得有:

$$J(n)=\min_{n^*} J(n^*).$$

根据上述定理及预报问题的特殊性, 在求解预报问题中, 只需把预报模型取成时变参数的线性模型就够了.

五、预报方法及应用效果

(一)预报方法

根据前面的结果, 对于天气预报, 我们基本上只建立具有时变参数的线性预报模型就够了. 不失一般性, 设预报模型具有形式:

$$y(k)=\alpha_1(k)y(k-1)+\cdots+\alpha_n(k)y(k-n)+\beta_0(k)u(k)+\cdots+\beta_m(k)u(k-m)+v(k),$$

或者

$$y(k)=\varphi(k)\ \theta(k)+v(k),$$

其中

$$\varphi(k)=[y(k-1),\ \cdots,\ y(k-n),\ u(k),\ \cdots,\ u(k-m)]^{\tau},$$

$$\theta(k)=[\alpha_1(k),\ \cdots,\ \alpha_n(k),\ \beta_0(k),\ \cdots,\ \beta_m(k)]^{\tau},$$

不难用算法(B)或其修正算法组(C)得出参量$\theta(k)$的一系列估值:

$$\hat{\theta}(0),\ \hat{\theta}(1),\ \cdots,\ \hat{\theta}(N), \tag{D}$$

N是观测的终止时刻. 显然序列(D)可以看成是时间序列$\{\theta(k)\}$的部分实现. 一般的说$\{\theta(k)\}$是时变的. 为寻求$y(k)$的预报值, 首先必须得到$\theta(k)$的预报值. 而这正是多层递阶预报方法所能够解决的. 由此可见, 我们这套建模方法必须和多层递阶预报方法结合起来才能有效. 这就是我们建议采取的预报方法. 关于多层递阶预报方法的详细讨论, 可参看文献[2].

(二)实际应用的结果

应用这种方法, 我们(包括张恩恕和汤兵勇)对天气要素进行了大量的预报工作, 分别建立了黑龙江省冬季平均气温, 黑龙江省五月降水环流形势[4], 黑龙江省夏季降水量[5], 黑龙江省夏季平均气温, 5~8月各月鄂霍次克海高压, 夏季副热带高压特征量(西伸脊点位置、面积指数、脊线位置)等预报量的多层递阶预报模型. 对21个预报量逐年补充新掌握的数据, 由各自的预报公式进行向前一步预报. 总共预报168次, 趋势评为正确的有148次, 准确率达88%.

为了比较，我们还运用多元回归方法，用同样的预报因子，对上述的试报项目中的16个预报量进行向前一步的预报．在128次试报中，多元回归法仅报对82次，趋势准确率为64.1%；而多层递阶法却报对112次，趋势准确率达87.5%．

这种方法已被实际预报业务所采用．从1982年11月到1984年5月，对黑龙江省月、季降水量，平均气温等气象要素，以及西北太平洋副热带高压、鄂霍次克海高压等大型环流系统进行了预报．在29项预报中，趋势正确的有23项．趋势准确率达79.3%．特别是在对我国夏季降水和气温有重大影响的西北太平洋副热带高压夏季(6～8月)9项特征量的预报，趋势全部正确．

参考文献

〔1〕韩志刚，动态系统时变参数的辨识，自动化学报，**10**，4，(1984) 330—337.

〔2〕韩志刚，动态系统预报的一种新方法，自动化学报，**9**，3，(1983)，161—168.

〔3〕韩志刚，一类线性系统参数辨识的统一处理的途径，黑龙江大学自然科学学报，1，(1984)，12—20.

〔4〕韩志刚、汤兵勇等，黑龙江省五月降水环流形势的多层递阶长期预报模型，信息与控制，**14**，2，(1985)，7—11.

〔5〕韩志刚、汤兵勇等，黑龙江省夏季降水多层递阶长期预报模型，科学通报，8，(1984)，490—491.

〔6〕张恩恕、韩志刚等，西太平洋夏季副高特征量多层递阶长期预报模型，高原气象，2，(1984)，51—56.

THE MODELLING AND PREDICTION OF WEATHER SYSTEM

Han Zhigang

(Heilongjiang University)

Abstract

In this paper, the modelling and prediction problems of weather system models have been considered. We have showed that, because we have the multi-level recursive prediction method, such that linear prediction model with time-varying parameters has some universalism. The report of application results have been given.