

控制系统参数优化的一种方法

王 治 森

(合肥工业大学)

摘 要

本文给出一种在时间域里实现带稳定性约束的线性定常系统的优化方法。它不同于最优控制理论所采用的解析方法，而是建立在用计算机解非线性规划问题的基础上的。优化的目标函数采用二次型积分泛函，利用模态矩阵导出了它的一个规范化的算法，然后用增广的拉格朗日乘子法来求解。这一方法适合于那些不能满足最优控制论要求的许多实际系统。对于可稳定的系统，无论原始设计参数是否满足稳定性条件，经优化后总能获得稳定的最优解。

根据最优控制理论，对于一个给定的线性定常系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (2)$$

可以设计一个全状态反馈控制器

$$u(t) = -\hat{K}x(t), \quad (3)$$

使得二次型目标泛函，即优化的目标函数

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (4)$$

最小。

根据最优控制理论，实现上述最优控制，要求全状态反馈，因而系统的所有状态都必须是完全可观测和可控制的。在这一条件下，可以用解析的方法求出(3)式中的最优反馈矩阵。

然而，对于许多实际控制系统，并非所有的状态变量都是可观测和可控制的，或者，为了检测它们而为每一个状态变量设计一个传感器在实际上是不现实或不经济的。其次，许多实际的控制系统，其结构是事先已经确定了的，如PID控制器。在上述两种情况下，就不可能采用最优控制论的全状态反馈方法。第三，除了控制系统，还有许多动态系统，它们并不存在控制问题，却要求系统的参数设计得能使之获得最优的响应特性，或者具有最强的抗干扰能力。在所有上述情况下，由二次型最优控制论给出的解析

方法就不再适用，而采用基于非线性数学规化的参数优化方法，却能有效地解决这类问题。

随着电子计算机和多种计算方法的高速发展，基于数学规划的优化方法在控制系统及一般动态系统的设计上起着越来越重要的作用，因而已经开始受到很大重视。但是比起二次型最优控制来，在控制系统参数优化方面发表的文献还很少，本文是在这方面的一个研究成果，文中通过计算实例说明了这一方法的有效性。

一、控制系统参数优化问题的提法

许多线性定常系统，无论是控制系统或是一般的动态系统，其参数优化问题都可以归结为如下的模式：

给定一个动态系统或闭环控制系统

$$\dot{x}(t) = F(d)x(t) \quad x(0) = x_0 \quad (5)$$

寻求最优设计参数 d ，在满足

a) 稳定性约束；

b) 其它的关于设计参数 d 的等式或不等式约束的条件下，使二次型泛函指标

$$I(d) = \int_0^{\infty} \bar{x}^T(t) Q(d) x(t) dt \quad (6)$$

最小。

为了求解上述控制系统参数优化问题，首要的基本问题是如何计算 (6) 式所给出的目标函数。

最常用的方法是频域法。这种方法给出的关于 (6) 式的计算公式不具备统一的形式，且只适合于低阶系统，因而不便于建立通用的计算程序。此外，频域法不适于多输入多输出的多变量系统和非线性系统。

另一类方法属于时域法。时域法是一种按部就班的规范化的方法，特别适合于复杂系统的计算机辅助设计。

目前采用的时域方法，主要有数值积分法和求解 Lyapunov 矩阵方程^[2]

$$F^T P + P F + Q = 0 \quad (7)$$

上述的频域法和时域法都存在一个共同的问题，即所给出的关于目标泛函 (6) 的计算公式都不包含有关系统稳定性的信息，因而还需要另外判断其最优解是否满足稳定性约束条件。例如要检验 (7) 式解出的矩阵 P 的正定性。

本文给出的方法也属于时域方法，但不同于数值积分法和解 Lyapunov 方程的方法，这种方法在模态分析的基础上给出 (6) 式的一个规范化算法。由于模态分析是建立在求解特征值问题基础上的，因而能够直接给出有关系统稳定性的最充分的信息。随着计算技术的发展，目前已有许多非常有效的解特征值问题的算法和标准程序，如 QR 方法等，现代计算机运算速度的突飞猛进的提高，更为这一方法提供了物质条件。

我们知道, 当状态矩阵 F 的全部特征值都不相同, 即没有重根时 (本文暂不讨论有重根的情况), (5) 式的解为

$$x(t) = \phi e^{\Lambda t} z_0, \quad (8)$$

其中, ϕ 为模态矩阵, Λ 为特征值构成的对角矩阵, 而

$$z_0 = \phi^{-1} x_0. \quad (9)$$

将 (8) 代入 (6), 得

$$I = \bar{z}^T H z_0, \quad (10)$$

其中

$$H = \int_0^{\infty} e^{\bar{\Lambda}^T t} G e^{\Lambda t} dt, \quad (11)$$

$$G = \bar{\phi}^T Q \phi, \quad (12)$$

ϕ , Λ 和 z_0 一般都是复矩阵和复向量. 为了避免复数运算 (它需要比实数运算大得多的计算工作量并带来大的计算误差), 我们采取下述方法:

设系统有 m 个不同的实特征值 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ 和 $n-m$ 个复特征值

$$\sigma_{m+1} + i\omega_{m+1}, \dots, \sigma_n + i\omega_n,$$

我们可以构成一个实矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \Pi \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m \end{pmatrix} \quad (14)$$

是一个由 m 个实特征值组成的 $m \times m$ 阶对角矩阵, 而矩阵

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi_s \end{pmatrix} \quad (15)$$

是一个由 $s = (n-m)/2$ 个二阶方阵 (实的)

$$\pi_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (16)$$

组成的 $(n-m) \times (n-m)$ 阶块状对角阵. 其中 σ_i 和 ω_i 分别是复特征值的实部和虚部.

相应地, 也可以把它的模态矩阵表示为由 n 个实向量组成的矩阵

$$\psi = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \beta_{m+1}, \dots, \alpha_{(n-m)/2}, \beta_{(n-m)/2}), \quad (17)$$

其中, α_i 和 β_i 分别对应于相应的特征向量的实部和虚部. 于是 (11) 和 (12) 中的复矩阵 H 和 G 也都化为相应的实矩阵. 对 (11) 直接积分, 经过一系列推演^[5], 最后得到 H 的一个规范化的表达式

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中, H_1 是由 $m \times m$ 个实元

$$h_{i,j} = \frac{g_{i,j}}{\sigma_i + \sigma_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

组成的子矩阵.

$H_2 (= H_3^T)$ 是由 $m \times (n-m)/2$ 个二维向量

$$\begin{pmatrix} h_{i,j} \\ h_{i+1,j} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sigma_i + \sigma_j} \begin{pmatrix} \sigma_i + \sigma_j & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i + \sigma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{i,j} \\ g_{i+1,j} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$i = m+1, m+3, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$

组成的子矩阵.

H_4 是由 $(n-m) \times (n-m)/4$ 个 2×2 阶小方阵

$$\begin{pmatrix} h_{i,j} & h_{i,j+1} \\ h_{i+1,j} & h_{i+1,j+1} \end{pmatrix}, \quad i, j = m+1, m+3, \dots, n \quad (21)$$

组成的子矩阵 (参见[5]).

求出 H 后, (6) 式给出的目标泛函就可以直接得到

$$I = z_0^T H z_0, \quad (22)$$

其中

$$z_0 = \psi^{-1} x_0. \quad (23)$$

(18) ~ (23) 就构成了求解 I 的一个规范化的算法.

二、带稳定性约束的控制系统参数优化问题的解法

上述目标函数 I 的表达式是用特征值和特征向量给出的, 因此我们也就自然地直接用特征值来给出系统的稳定性约束条件. 众所周知, 当系统的全部特征值的实部 $\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$ 均为负时, 系统是渐近稳定的. 因此, 带稳定性约束的参数优化问题可表为:

对于闭环控制系统或一般的动态系统

$$\dot{x}(t) = F(d)x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (24)$$

在满足稳定性约束

$$g(\sigma) \triangleq \sigma + \delta \leq 0 \quad (25)$$

的条件下, 求取设计参数 d , 使

$$I \triangleq z_0^T H z_0 \quad (26)$$

最小. (25) 中的 $\delta (> 0)$ 为稳定性裕度,

上述带约束的优化问题, 可以采用增广的拉格朗日乘子法, (亦称增广的罚函数法) 通过求解一系列关于原目标函数 I 的增广的拉格朗日函数

$$L(d, \lambda, r) = I(d) + \lambda^T g(\sigma) + \frac{r}{2} g^T(\sigma) g(\sigma) \quad (27)$$

的无约束优化问题来逐渐逼近。(27)中, λ 为拉格朗日乘子向量, r 为惩罚因子。即, 在第 k 次迭代中, 求解无约束优化问题

$$\min f(d, \lambda_k, r_k) \rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sigma_i(d) & \text{当 } \sigma > 0, & (28a) \\ L(d, \lambda_k, r_k) & \text{当 } -\delta \leq \sigma \leq 0, & (28b) \\ I(d) & \text{当 } \sigma < -\delta. & (28c) \end{cases}$$

(28) 式的意义如下:

1. 当 $\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$ 不全为负时, 求 $\sum_{i=1}^n \sigma_i$ 的极小 (28a)。在这种情况下,

目标泛函 $I(6)$ 式无定义。因为我们已假定系统是稳定的, 因此总可以在某次迭代中使 σ_i 全为负。进入 (6) 式有定义的区域。

2. 当 $\delta_i \leq \sigma_i < 0$ 时, ($i=1, 2, \dots, n$), 此时 I 有定义, 但系统不满足稳定性裕度的要求, 则求增广的拉格朗日函数 (27) 式的极小 (28b)。

3. 如果最优解在可行域, 即在 $\sigma_i < -\delta_i (i=1, 2, \dots, n)$ 之内时, 稳定性约束条件 (25) 式为不起作用的约束, 故直接优化 $I(28c)$ 。

由于在稳定区域的边界上 ($\sigma=0$), $I \rightarrow \infty$, 故当搜寻进程达到稳定区 (但不一定满足稳定裕度) 之后, 理论上不会再越出稳定边界。

三、实例

用本文的方法对若干文献中举出的实例进行了计算。计算结果表明本文的方法是有效的^[5]。表1至表3给出了其中三个的计算结果, 它们分别取自[1]、[4]和[2]。其系统框图示于图1~图3。表中同时也给出了所引文献中的计算结果, 以兹比较。三个例子所用的目标泛函分别为

$$I_1 = \int_0^{\infty} [e_1^2(K) + e_2^2(K)] dt \quad K = (K_1, K_2)^T,$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} [25e^2(K) + u^2(K)] dt \quad K = (K_1, K_2)^T,$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} e^2(K) dt \quad K = (K_p, K_i, K_d)^T,$$

其中 e 为输出误差, u 为控制信号, K 为优化参数。

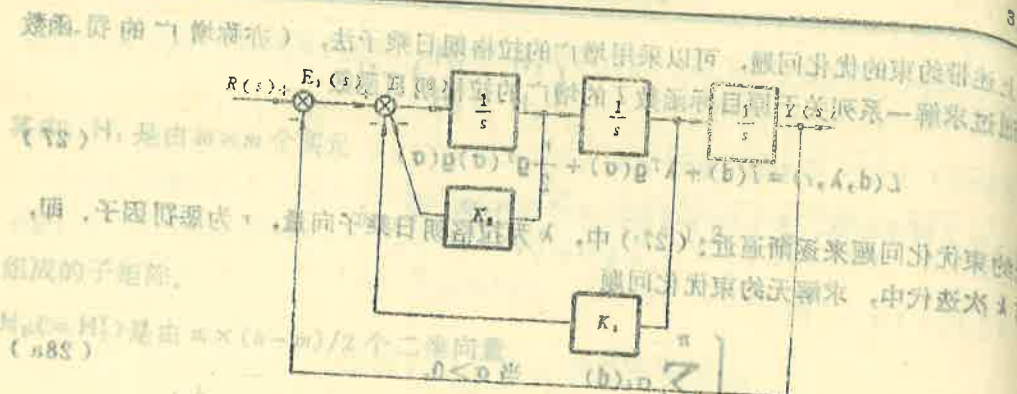


图1 多环控制系统的设计, 取自[1]

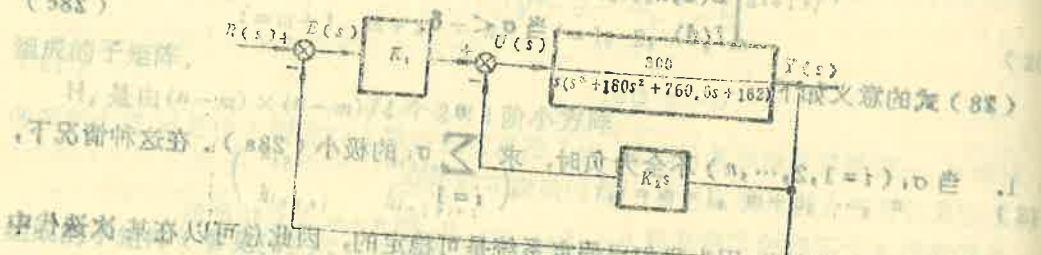


图2 天线跟踪系统设计, 取自[4]

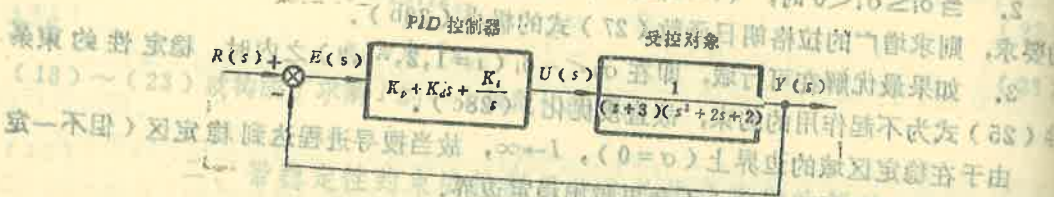


图3 PID 控制器设计, 取自[2]

值得着重指出的是, 上述文献中关于目标泛函的计算公式都是用频域法导出的。它们都是针对特定系统导出的, 不具备通用性。尽管本文给出的关于 I 的计算方法与之完全不同, 但所得到的结果却是完全一致的。此外, 由于频域法得出的 I 的计算公式不包含有关稳定性的信息, 因而[2]和[3]中都用了另外一套复杂的方法来保证稳定性。而在[1]和[4]中, 由于未加稳定性约束, 因而当初始点选择不当时, 例如选取在不稳定区域或稳定区域的某些点处(如表1中最后一行所示), 将得不到稳定的最优解。事实上, 在选择设计的初始参数时, 我们是不可能知道哪里是稳定区域的。本文给出的方法, 不受初始点选择的限制, 即使初始点选取在不稳定区中, 也能获得稳定的最优解。在计算机上所做的实验也证明了这一点。

表 1 例 1 (取自[1], 见图 1) 的优化结果

初始参数		优化结果			所用方法
K_1^0	K_2^0	K_1	\hat{K}_1	\hat{I}	
1000	1000	1.999995	1.999980	2.000000	本文
20	20	2.000003	2.000000	2.000000	本文
-5	-5	2.000005	2.000004	2.000000	本文
20	20	5.530124	-17.1545		[注]

注, 采用[1]给出的公式, 不加稳定约束。

表 2 例 2 (取自[4], 见图 2) 的优化结果

初始参数		优化结果			所用方法
K_1^0	K_2^0	K_1	K_2	J	
4	5	3.6	4.15	30.51	[4]
4	5	3.7116	4.1872	30.51	本文
20	20	3.7116	4.1872	30.51	本文

表 3 例 3 (选自[2], 见图 3) 的优化结果

初始参数			优化结果			计算效率			所用方法
K_1^0	K_2^0	K_3^0	K_1	\hat{K}_1	K_d	N_f	N_i	T(秒)	
1	1	1	100	31.258	100	—	30	16	[2]
1	1	1	99.9899	30.815	99.991	380	—	—	[3]
1	1	1	100.0000	30.803	100.000	156	15	6.2	本文

[注], N_f —目标函数调用次数, N_i —迭代次数, T—CPU时间(秒)。

参 考 文 献

- [1] Merriam III, C. W., Automated Design of Control Systems, Gordon and Breach Science Publishers, (1974).
- [2] Polak, E. and Mayne, D., An Algorithm of Optimization Prob-

- lems with Functional Inequality Constraints, IEEE Trans. Auto. Contr., **21**, 2, (1976), 184—196.
- [3] Gesing, W. and Davison, E. J., An Exact Penalty Function Algorithm for Solving General Constrained Parameter Optimization, Automatica, **15**, 12, (1979), 175—188.
- [4] Chen, C. T., Analysis and Synthesis of Linear Control Systems, New York, (1975).
- [5] Wang, Z. S. and Seireg, A., A Time-Domain Parameter Optimization Algorithm for Control Systems, Computer In Mechanical Engineering, **2**, 1, (1983), 73—81.

AN APPROACH OF PARAMETER OPTIMIZATION FOR CONTROL SYSTEMS

Wang Zhisen

(Hefei Polytechnic University)

Abstract

An approach for solving the optimization problems with stability constraints of the time-invariant linear systems is proposed in this paper. The approach, which is different from the method adopted by the quadratic performance index optimal control theory, is based on the nonlinear mathematical programming. The quadratic functional is taken as the objective function of the optimization. A systematic algorithm used to compute the objective functional is deduced by using the modal matrix. The optimization problem is solved by incorporating the augmented Lagrange multiplier method and the BFGS method. The approach proposed in this paper is suitable for many practical systems which do not satisfy the requirements of the quadratic performance index optimal control theory. For stabilizable systems, the optimized results satisfying the stability constraints can be achieved without concern as to whether the initial design parameters are in the stable or unstable region.