第3卷 第3期 控制理论与应用 Vol.3, No.3
1986年9月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Sept., 1986

一类半线性椭圆型分布参数控制系统的最大值原理

朱 其 吉

（浙江大学）

摘 要

本文给出半线性椭圆型分布参数控制系统

$$Ay(u)+b(u,y(u))=f(u),$$
$$y(u)|_{\partial\Omega}=0,$$

在一般泛函指标下的最大值原理。

一、问题的提法与主要结果

设 $\Omega\subset R^n$ 为有界开域，$U\subset R^m$ 为有界集，称为控制集。定义容许控制类 $U_{ad}=\{u$, $u(\cdot)$为$\Omega\to U$的每个分量都可测的映射$\}$. 记 $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$，设$A$为二阶椭圆型微分算子

$$Ay=-\sum_{i,j=1}^{n}D_i(a^{ij}D_jy)+a^0y, \tag{1}$$

其系数满足 $a^{ij}(\cdot)$, $a^0(\cdot)\in L^\infty(\Omega)$, $a^{ij}(\cdot)=a^{ji}(\cdot)$, 存在$\delta$, $\omega>0$使得对几乎一切 $x\in\Omega$ 成立

$$a^0(x)\geq\omega,\quad \sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\delta\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=\delta|\xi|^2. \tag{2}$$

$b(x,u,y)$为 $R^n\times R^m\times R\to R$ 的连续函数，$\dfrac{\partial b}{\partial y}(x,u,y)$连续且对一切$(x,u)\in\Omega\times U$ 成立

$$0\leq\frac{\partial b}{\partial y}(x,u,y)\leq M(|y|^{\varepsilon(n)}+1), \tag{3}$$

其中$\varepsilon(n)=\dfrac{4}{n-2}$，$n\geq3$；$M$ 为常数。另外假设存在连续函数 $L(y,y')$使对一切(x,u)

本文于 1983 年 12 月 24 日收到。1986 年3月 17 日收到修改稿。

$\in \Omega\times U$一致成立

$$\left|\frac{\partial b}{\partial y}(x,u,y')-\frac{\partial b}{\partial y}(x,u,y)\right|\leq L(y,y')|y-y'|. \tag{4}$$

又设$f(x,u)$：$R^n\times R^m\to R$连续.

考虑分布参数控制系统

$$\begin{aligned}&Ay(x,u)+b(x,u(x),y(x,u))=f(x,u(x)),\ x\in\Omega,\\&y(x,u)\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad u\in U_{ad}.\end{aligned}\tag{5}$$

称$y(\cdot,u)$为系统（5）对应于容许控制u的解，如果$y(\cdot,u)\in H_0^1(\Omega)$且对任意$\phi(\cdot)\in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_iy(x,u)D_j\phi(x)+a^0(x)y(x,u)\phi(x)\right\}dx\\&+\int_\Omega b(x,u(x),y(x,u))\phi(x)\,dx=\int_\Omega f(x,u(x))\phi(x)dx^{[1]}.\end{aligned}\tag{6}$$

在本文所述条件下有

引理1　对每个$u\in U_{ad}$系统（5）的解存在、唯一.

引理2　系统（5）的解$y(\cdot,u)\in L^\infty(\Omega)$，且存在与$u\in U_{ad}$无关的常数$C$使$\|y(\cdot,u)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C$.

这两条引理的证明将在下面定理的证明中给出.

引入指标泛函

$$J(u)=\int_\Omega g(x,y(x,u),u(x))dx \tag{7}$$

及共轭系统

$$\begin{aligned}&Ap(x,u)+\frac{\partial b}{\partial y}(x,u(x),y(x,u))p(x,u)=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y(x,u),u(x)),\ x\in\Omega,\\&p(x,u)\Big|_{\partial\Omega}=0,\end{aligned}\tag{8}$$

其中$g(x,y,u)$为$R^n\times R\times R^m\to R$的连续函数，$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,u)$存在且连续. 共轭系统解的意义与（5）相同. 由引理2及[4]知：共轭系统（8）存在唯一解$p(\cdot,u)\in L^\infty(\Omega)$，且存在与$u\in U_{ad}$无关的常数$C$使得

$$\|p(\cdot,u)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C. \tag{9}$$

最优控制问题的提法为：求$u^*\in U_{ad}$使

$$J(u^*)=\inf_{u\in U_{ad}} J(u), \tag{10}$$

若 u^* 满足(10)，则称之为一个最优控制，它对应的系统(5)的解称为最优解，记为 y^*。

下面给出此最优控制问题的最大值原理，在不引起混淆时略去自变量 x。

定理　在本文假设的条件下，若 u^* 是最优控制，y^* 是对应的最优解，则对几乎一切 $x\in\Omega$

$$\begin{aligned} &p^*(x)(b(x,u^*(x),y^*(x))-f(x,u^*(x))-g(x,y^*(x),u^*(x)) \\ &=\max_{u\in U}\ \{p^*(x)(b(x,u,y^*(x))-f(x,u))-g(x,y^*(x),u)\}, \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $p^*(\cdot)$ 是 $u^*(\cdot)$，$y^*(\cdot)$ 对应的共轭系统的解。

这个定理推广了[1]中相应结果，与 Barbu 及 Lions 新近的工作[3],[5]是互不包含的。

二、定　理　的　证　明

引理1的证明　唯一性是明显的，今证存在性：由(3)知存在常数 N 使

$$|b(x,u,y)|\le N\left(|y|^{\frac{n+2}{n-2}}+1\right). \tag{12}$$

因此对于 $(y,\phi)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 可以定义

$$a(y,\phi)=\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^n a^{ij}D_iyD_j\phi+a^0y\phi\right\}dx+\int_\Omega b(u,y)\phi dx. \tag{13}$$

由 $a^{ij}(\cdot)$，$a^0(\cdot)\in L^\infty(\Omega)$ 及(13)式知，对每个 $y\in H_0^1(\Omega)$，$a(y,\phi)$ 是 ϕ 的连续线性泛函，因而 $a(y,\phi)=\langle Ay,\phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),\,H_0^1(\Omega)}$ 定义一个算子 $A:H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$.

由条件(2)可知 A 是单调、强迫的[3]，我们来说明 A 还是一维弱连续的(hemicontinuous)[3]。取 y，$h\in H_0^1(\Omega)$，任取 $\phi\in H_0^1(\Omega)$，需要验证 $\lim\limits_{t\to0}\langle A(y+th),\phi\rangle=\langle Ay,\phi\rangle$，即

$$\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^n a^{ij}D_i(y+th)D_j\phi+a^0(y+th)\phi\right\}dx+\int_\Omega b(u,y+th)\phi dx$$

$$\longrightarrow\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^n a^{ij}D_iyD_j\phi+a^0y\phi\right\}dx+\int_\Omega b(u,y)\phi dx\quad(t\to0).$$

易见只要说明

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega b(u,y+th)\phi dx=\int_\Omega b(u,y)\phi dx。$$

这由估值

$$\left|\int_\Omega [b(u,y+th)-b(u,y)]\phi dx\right|$$

$$=\left|\int_\Omega t\frac{\partial b}{\partial y}(u,y+t\lambda h)h\cdot\phi dx\right|\qquad \lambda=\lambda(x)\in(0,1)$$

$$\le|t|\int_\Omega M[(|y|+|h|^{e(n)}+1]|h||\phi|dx$$

可知。于是利用[3, p.40, Theorem 1.3]知 A 是满映射，而 $f(u)\in H^{-1}(\Omega)$，从而存在性得证。

引理 2 的证明　设 $y(u)$ 为（5）的解，由定义（6）式成立。利用 $f(x,u)$ 的连续性及 Ω，U 有界，存在正常数 k，使对一切 $(x,u)\in\Omega\times U$，$|f(x,u)|\le k$。对给定 $\beta\ge 1$ 和 $N\ge k$，定义函数 $H\in C^1[k,\infty)$ 如下：

$$H(z)=\begin{cases}z^\beta-k^\beta & z\in[k,N],\\ \text{线性函数} & z\ge N。\end{cases}\tag{14}$$

置 $y^+(u)=\max(y(u),0)$，$w=y^+(u)+k$。在（6）中令

$$\phi=G(w)=\int_k^w|H'(s)|^2ds,\tag{15}$$

利用链式法则可知

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}D_iwD_jwG'(w)dx+\int_\Omega a^0y^+(u)G(w)dx$$

$$+\int_\Omega b(u,y(u))G(w)dx=\int_\Omega f(u)G(w)dx。\tag{16}$$

由于 $G(w)\ge 0$，且当 $y(u)=0$ 时 $G(w)=0$；而 $b(u,y^+(u))\ge b(u,0)$ 我们有

$$\int_\Omega b(u,y(u))G(w)dx=\int_\Omega b(u,y^+(u)G(w)dx\ge\int_\Omega b(u,0)G(w)dx,\tag{17}$$

利用（16）、（17）及（2）得

$$\delta\int_\Omega|Dw|^2G'(w)dx\le\int_\Omega G(w)(|a^0||y^+(u)|+|b(u,0)|+|f(u)|)dx,\tag{18}$$

这里 Dw 是 w 的梯度。由于 $G(s)\le G'(s)$，令 $\overline{b}=|a^0|+|f(u)|/k+|b(u,0)|/k$，则由（18）可知

$$\int_\Omega|DH(w)|^2dx\le\delta^{-1}\int_\Omega\overline{b}w^2G'(w)dx=\delta^{-1}\int_\Omega\overline{b}|H(w)w|^2dx,$$

取 $q>n$，因为 $H(w)\in H_0^1(\Omega)$，利用 Sobolev 不等式和 Hölder 不等式可得

$$\|H(w)\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)}\leq C_1\left(\int_\Omega \overline{b}\,(H'(w)w)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1\|\overline{b}\|_{q/2}^{\frac{1}{2}}\|H'(w)w\|_{2q/(q-2)}$$

$$\leq C_2\|H'(w)w\|_{2q/(q-2)},\tag{19}$$

其中对 $n>2$，$\hat{n}=n$；$2<\hat{2}<q$。C_1,C_2 是与 $n,\delta,\mu(\Omega)$ 有关的常数。以下采用〔4〕中的证法，在（19）中令 $N\to\infty$，得对任何 $\beta\geq 1$，$w\in L^{2\beta q/(q-2)}(\Omega)$ 蕴含更强的包含关系 $w\in L^{2\beta\hat{n}/(\hat{n}-2)}(\Omega)$，而且令 $q^*=2q/(q-2)$，$\chi=\hat{n}(q-2)/q(\hat{n}-2)>1$ 就得到

$$\|w\|_{\beta\chi q^*}\leq (C_2\beta)^{1/\beta}\|w\|_{\beta q^*}.\tag{20}$$

于是通过归纳法可以假定 $w\in\bigcap_{1\leq p<\infty}L^p(\Omega)$。选取 $\beta=\chi^m$，$m=0,1,\cdots$，由（20）有

$$\|w\|_{\chi^N q^*}\leq\prod_{m=0}^{N-1}(C_2\chi^m)^{\chi^{-m}}\|w\|_{q^*}$$

$$\leq C_2^\sigma\chi^\tau\|w\|_{q^*}\leq C_3\|w\|_{q^*},\quad \sigma=\sum_{m=0}^{N-1}\chi^{-m},\quad \tau=\sum_{m=0}^{N-1}m\chi^{-m}.$$

令 $N\to\infty$ 得 $\sup w\leq C_3\|w\|_{q^*}$。由 $L^p(\Omega)$空间的范数内插不等式可得 $\sup\limits_\Omega y(u)\leq C_4(\|y^+(u)\|_2+k)$，对 $-y(u)$应用上述结果则有 $\sup\limits_\Omega(-y(u))\leq C_5(\|y^-(u)\|+k)$，于是存在常数 $C=C(\delta,n,\mu(\Omega))$使

$$\|y(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C(\|y(u)\|_2+k).$$

根据 f 一致有界，算子 A 强制及Sobolev不等式知 $\|y(u)\|_2$ 对于 $u\in U_{ad}$ 一致有界。引理得证。

定理的证明　设 u^* 是最优控制，y^* 是对应的最优解，任取 $v\in U_{ad}$，由计算可知：

$$0\leq J(v)-J(u^*)=\int_\Omega[g(y(v),\ v)-g(y^*,u^*)]dx$$

$$=G(v)+F(v)+R_1(v)+R_2(v)+R_3(v)+R_4(v),\tag{21}$$

其中

$$G(v)=\int_\Omega[g(y^*,v)-g(y^*,u^*)]dx,$$

$$F(v)=\int_\Omega[f(v)-f(u^*)]p^*dx-\int_\Omega[b(v,y^*)-b(u^*,y^*)]p^*dx,$$

$$R_1(v)=\int_\Omega\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(y^*+\theta(y(v)-y^*),u^*)(y(v)-y^*)^2dx,\qquad \theta=\theta(x)\in(0,1),$$

$$R_2(v)=\int_\Omega\{[g(y(v),v)-g(y^*,v)]-[g(y(v),u^*)-g(y^*,u^*)]\}dx,$$

$$R_3(v)=\int_\Omega \left[b(v,y^*)-b(v,y(v))-\frac{\partial b}{\partial y}(v,y^*)(y^*-y(v))\right]p^*dx,$$

$$R_4(v)=\int_\Omega \left[\frac{\partial b}{\partial y}(v,y^*)-\frac{\partial b}{\partial y}(u^*,y^*)\right](y^*-y(v))p^*dx.$$

记 E 为 $g(y^*,u^*)$，y^*，p^*，$f(u^*)$，$b(u^*,y^*)$的公共 Lebesgue 点全体所成的集合，则 $\mu(\Omega-E)=0$。这里 μ 为 Lebesgue 测度。任取 $x_0\in E$，令 $S_l=\left\{x:|x-x_0|\le\frac{1}{l}\right\}$，用 χ_l 记 S_l 的特征函数，记 $\sigma_l=\mu(S_l)$。任取 $u\in U$，在（21）中取 $v=v_l=\chi_l u+(1-\chi_l)u^*$，则

$$O\le G(v_l)+F(v_l)+R_1(v_l)+R_2(v_l)+R_3(v_l)+R_4(v_l). \tag{22}$$

易验证

$$\lim_{l\to\infty}\sigma_l^{-1}G(v_l)=g(x_0,u,y^*(x_0))-g(x_0,u^*(x_0),y^*(x_0)),$$

$$\lim_{l\to\infty}\sigma_l^{-1}F(v_l)=p^*(x_0)[f(x_0,u)-b(x_0,u,y^*(x_0))]$$
$$-p^*(x_0)[f(x_0,u^*(x_0))-b(x_0,u^*(x_0),y^*(x_0))].$$

因此为了证明定理，只要证明

$$\lim_{l\to\infty}\sigma_l^{-1}R_m(v_l)=0\quad m=1,2,3,4. \tag{23}$$

为此先估计 $\|y^*-y(v_l)\|_r\left(r=\frac{2n}{n-2}\right)$。由解的定义

$$\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^n a^{ij}D_i(y^*-y(v_l))D_j(y^*-y(v_l))+a^0(y^*-y(v_l))^2\right\}dx$$
$$+\int_\Omega[b(u^*,y^*)-b(v_l,y(v_l))](y^*-y(v_l))dx$$
$$=\int_\Omega[f(u^*)-f(v_l)](y^*-y(v_l))dx. \tag{24}$$

由 $b(u,y)$关于 y 单调及（2）式知存在常数 N 使

$$\|y^*-y(v_l)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\le N\left\{\int_{S_l}|f(u^*)-f(u)||y^*-y(v_l)|dx\right.$$
$$\left.+\int_{S_l}|b(u^*,y^*)-b(u,y^*)||y^*-y(v_l)|dx\right\}$$
$$\le 2(M_1+M_2)N\int_{S_l}|y^*-y(v_l)|dx$$

$$\leq 2(M_1+M_2)N\sigma_l^{\frac{1}{r'}}\|y^*-y(v_l)\|_r,$$

其中 $M_1=\sup\limits_{(x,u)\in\Omega\times U}|f(x,u)|$； $M_2=\sup\limits_{\substack{(x,u)\in\Omega\times U\\ |y|\leq C}}|b(x,u,y)|$， 而 C 为引理2中的常数， $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$。由于 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega)$（$\hookrightarrow$ 表示嵌入），上式蕴含

$$\|y^*-y(v_l)\|_r=0\left(\sigma_l^{\frac{1}{r'}}\right). \tag{25}$$

现在可以证明（23）了。作估计

$$|R_1(v_l)|\leq\int_\Omega\left|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(y^*+\theta_1(y(v_l)-y^*),u^*)\right||y(v_l)-y^*|^2dx$$

$$=0\left(\int_\Omega|y(v_l)-y^*|^2dx\right)=0\left(\sigma_l^{\frac{2}{r'}}\right),$$

$$|R_2(v_l)|\leq\int_{S_l}|[g(y(v_l),u)-g(y^*,u)]-[g(y(v_l),u^*)-g(y^*,u^*)]|dx$$

$$=\int_{S_l}\left|\frac{\partial g}{\partial y}(y^*+\theta_2(y(v_l)-y^*),u)-\frac{\partial g}{\partial y}(y^*+\theta_3(y(v_l)-y^*),u^*)\right|$$

$$|y(v_l)-y^*|dx=0\left(\int_{S_l}|y(v_l)-y^*|dx\right)$$

$$=0\left(\sigma_l^{\frac{2}{r'}}\right),$$

$$|R_3(v_l)|\leq\int_\Omega\left|b(v_l,y^*)-b(v_l,y(v_l))-\frac{\partial b}{\partial y}(v_l,y^*)(y^*-y(v_l))\right||p^*|dx$$

$$=\int_\Omega\left|\frac{\partial b}{\partial y}(v_l,y^*+\theta_4(y(v_l)-y^*))-\frac{\partial b}{\partial y}(v_l,y^*)\right||y^*-y(v_l)||p^*|dx$$

$$\leq\int_\Omega L(y^*,y(v_l))|y(v_l)-y^*|^2|p^*|dx$$

$$=0\left(\int_\Omega|y^*-y(v_l)|^2dx\right)=0\left(\sigma_l^{\frac{2}{r'}}\right),$$

$$|R_4(v_l)| \le \int_{S_l} \left| \frac{\partial b}{\partial y}(v, y^*) - \frac{\partial b}{\partial y}(u^*, y^*) \right| |y^* - y(v_l)| |p^*| dx$$

$$= 0\left(\int_{S_l} |y^* - y(v_l)| dx\right) = 0\left(\sigma_l^{\frac{2}{r'}}\right).$$

以上各式中 $\theta_m = \theta_m(x) \in (0,1)$，$m = 1,2,3,4$；中值定理是在相应函数值有限处应用的，取无穷值的零测度集并不影响积分值，因而可以忽略不计.由于$\frac{2}{r'} = \frac{2n}{n+2} > 1$，(23)式成立.

注：以上假定了 $n \ge 3$，当$n = 2$ 时，由于对任一$q \ge 1$，嵌入关系 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ 成立，因此条件(3)可以用

$$0 \le \frac{\partial b}{\partial y}(x, u, y) \le M(|y|^q + 1), \quad q \ge 1 \tag{3'}$$

代替，上述结果依然成立。当 $n = 1$ 时，$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$，因此条件(3)可以用

$$0 \le \frac{\partial b}{\partial y}(x, u, y) \tag{3''}$$

代替，定理结论保持不变。

最后举一个例子。考虑最优控制问题：对

$$\begin{aligned} -\Delta y + y^3 = u \qquad x \in \Omega \subset R^3, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \quad u \in V_{ad} = \{u \in L^\infty(\Omega): |u(x)| \le 1\}, \end{aligned} \tag{26}$$

极小化泛函指标

$$J(u) = \int_\Omega (y(u) - z)^2 dx + \int_\Omega u^2 dx, \quad z \in L^2(\Omega)。 \tag{27}$$

由定理知对最优控制 u^* 有

$$-p^*(x)u^*(x) - u^{*2}(x) = \max_{u \in [-1,1]} \{-p^*(x)u - u^2\} \quad \text{a. e.}, \tag{28}$$

其中 $p^*(\cdot)$ 满足共轭系统

$$-\Delta p^* + 3y^{*2}p^* = 2(y^* - z), \quad p^*|_{\partial\Omega} = 0。 \tag{29}$$

由(28)易确定

$$u^*(x) = \begin{cases} -1 & p^*(x) \ge 2, \\ -\frac{1}{2}p^*(x) & p^*(x) \in (-2, 2), \\ 1 & p^*(x) \le -2, \end{cases}$$

如果令

$$\Psi(t)=\begin{cases}-1 & t\geq 2,\\ -\frac{1}{2}t & t\in(-2,2),\\ 1 & t\leq -2,\end{cases}$$

那么

$$\left.\begin{array}{l}-\Delta y^*+y^{*3}=\Psi(p^*),\ y^*|_{\partial\Omega}=0,\\ -\Delta p^*+3y^{*2}p^*=2(y^*-z),p^*|_{\partial\Omega}=0,\end{array}\right\}\tag{30}$$

$$u^*=\Psi(p^*).\tag{31}$$

这样求解最优控制化成了求解方程组(30)的问题。

值得注意的是，在本例情况下，容易证明最优控制问题的解是存在的。这样我们通过应用定理就得到了方程组(30)解的存在性。这很类似于用变分法证明方程组解的存在性，但有趣的是(30)中 Ψ 是一个非光滑函数，这是采用极大值原理的好处。

致谢 本文为作者硕士研究生毕业论文的一部分，受导师张学铭教授指导，并得到李训经教授许多帮助，谨致深深的谢意。

参考文献

[1] Lions, J. L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer-verlag, Berlin Heidelberg New York, (1971), 95-97.

[2] Barbu, V., Necessary Conditions for Nonconvex Distributed Control Problems Governed by Elliptic Variational Inequalities, J. Math. and Appli., 80, (1981). 566-597.

[3] Barbu, V., Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucuresti, (1976).

[4] Gilbarg, D. and Trudinger, V. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-verlag, New York, (1977), 185-186.

[5] Lions, J. L,, Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, (1981), 529-530.

MAXIMUM PRINCIPLE FOR CONTROL SYSTEM GOVERNED BY ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Zhu Qiji
(Zhejiang University)

Abstract

In this paper, we consider the following optimal control problem:

$$\text{minimize}\int_{\Omega} g(y(u),u)$$

subject to

$$Ay(u)+b(y(u),u)=f(u)$$

where A is a elliptic partial differential operator of second order and b, f, g are functions satisfying certain smooth conditions. The main result is:

Theorem. Let $u^*\in U_{ad}$ be the solution of the above problem and y^* be the corresponding solution of the control system. Then for almost all $x\in\Omega$, we have

$$p^*(x)(b(x,u^*(x),y^*(x))-f(x,u^*(x)))-g(x,y^*(x),u^*(x))$$
$$=\max_{u\in U}(p^*(x)(b(x,u,y^*(x))-f(x,u))-g(x,y^*(x),u))$$

where $p^*(\cdot)$ is the solution of the corresponding adjoint system

$$Ap^*+\frac{\partial b}{\partial y}(u^*,y^*)p^*=\frac{\partial g}{\partial y}(y^*,u^*),\quad p^*|_{\partial\Omega}=0.$$

Example of applications is given.