第4卷 第1期
1987年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.4, No.1
March, 1987

严格正实裕度的理论和应用

何勤奋　史　维

（南京工学院）

摘　要

本文通过对离散系统的严格正实函数内在特性的研究，表明可以利用严格正实裕度的概念，对一类更广泛的离散自适应算法给出稳定性证明。

一、引　言

众所周知，在离散系统中，严格正实函数在自适应算法的稳定性证明中起着十分重要的作用[1~4]。通观所有利用严格正实函数去证明稳定性的自适应算法，不难发现，它们都不外乎是利用严格正实函数具有的下述特性：

$$\sum_{i=1}^{T} U_i Y_i \geq \beta_0 \sum_{i=1}^{T} U_i^2 + \beta_1,$$

$$\sum_{i=1}^{T} U_i Y_i \geq \beta_0^1 \sum_{i=1}^{T} Y_i^2 + \beta_1', \quad \forall T \in Z.$$

这里β_0、$\beta_0' \in (0,\infty)$，β_1、$\beta_1' \in [-\infty, 0]$，$Z \in \{1,2,\cdots\}$，$\{U_i\}$，$\{Y_i\}$是经严格正实函数映射的原函数和象函数。

对于不同的严格正实函数，可以利用严格正实裕度来度量它的某些内在特性，并可得到结论，只要时变因子α_i的变化落入由严格正实裕度所决定的变化范围内时，就可以保证下述式子成立

$$\sum_{i=1}^{T} U_i Y_i \alpha_{i+1} \geq \beta_0 \sum_{i=1}^{T} U_i^2 + \beta_1,$$

$$\sum_{i=1}^{T} U_i Y_i \alpha_{i+1} \geq \beta_0' \sum_{i=1}^{T} Y_i^2 + \beta_1', \quad \forall T \in Z.$$

本文于1985年3月14日收到。1985年10月19日收到修改稿。

从优化指标着手，可以看出，在通常已利用严格正实函数证明了稳定性的算法中，引入时变因子 α_i 后，可得到一类更为广泛的自适应算法，并可利用严格正实裕度的理论，解决这类算法的稳定性证明。

二、严格正实函数和严格正实裕度

对应于线性实系数有理传递函数 $H(Z^{-1})$，必可找到与之对应的最小实现的实系数状态方程

$$\begin{cases} X_{k+1}=AX_k+BU_k, \\ Y_k=CX_k+DU_k. \end{cases} \tag{1}$$

这里 $A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times 1}$，$C\in R^{1\times n}$，$D\in R^{1\times 1}$（$R^{n\times m}$ 表示为 n 行 m 列的矩阵空间且每个元素均属于 $R^{1\times 1}$ 的实数域）均可由 $H(Z^{-1})$ 的系数求解得到，U_k、Y_k 为系统的输入和输出。

若令 $P=P^T$，并利用关系式

$$\begin{cases} Q=P-A^TPA, \\ S^T=C-B^TPA, \\ R=2D-B^TPB. \end{cases} \tag{2}$$

这里 $P\in R^{n\times n}$，$Q\in R^{n\times n}$，$S\in R^{n\times 1}$，$R\in R^{1\times 1}$。则可得上述系统 $H(Z^{-1})$ 有以下关系式[5]

$$\sum_{i=1}^{T}U_iY_i=\frac{1}{2}\left\{X_{T+1}^TPX_{T+1}-X_1^TPX+\sum_{i=1}^{T}\begin{bmatrix}X_i\\U_i\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Q & S\\S^T & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_i\\U_i\end{bmatrix}\right\}. \tag{3}$$

引理 1 若 $H(Z^{-1})$ 是严格正实的，则有

$$\sum_{i=1}^{T}U_iY_i\geq\beta_0\sum_{i=1}^{T}U_i^2+\beta_1,$$

$$\sum_{i=1}^{T}U_iY_i\geq\beta_0'\sum_{i=1}^{T}Y_i^2+\beta_1', \qquad \forall T\in Z.$$

证 可以利用 Hitz-Anderson 引理[5]、[6]和（1）、（2）、（3）式直接得证。

定义 1 若 $H(Z^{-1})$ 是严格正实的，且做变换 $Z=\rho Z'$，$0\leq\rho\leq1$，得 $H(Z'^{-1})$ 仍为严格正实的，那么称 $\frac{1}{\rho^2}-1$ 为传递函数 $H(Z^{-1})$ 的严格正实裕度。

引理 2 若 $H(Z^{-1})$ 是严格正实的，且已知 $\frac{1}{\rho^2}-1$ 为其一个严格正实裕度，那么

对于 $\forall\delta\in[\rho,1]$，有 $\frac{1}{\delta^2}-1$ 是 $H(Z^{-1})$ 的严格正实裕度。

证　取 $Z=\delta Z^0$，根据（1）、（2）式，记

$H({Z^0}^{-1})$ 对应于 A^0，B^0，C^0，D^0，P^0，Q^0，S^0，R^0。

$H({Z'}^{-1})$ 对应于 A'，B'，C'，D'，P'，Q'，S'，R'。

由关系式 $Z^0=\frac{\rho}{\delta}Z'$，则有 $A'=\frac{\delta}{\rho}A^0$，$B'=\frac{\delta}{\rho}B^0$，$C'=C^0$，$D'=D^0$。

取 $P'=\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^2P^0$，有

$$\begin{bmatrix} Q^0 & S^0 \\ {S^0}^T & R^0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q' & S' \\ {S'}^T & R' \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \left[\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2-1\right]P' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

若 $H({Z'}^{-1})$ 是严格正实的，即有关系式

$$P'=P'^T>0,\quad \begin{bmatrix} Q' & S' \\ {S'}^T & R' \end{bmatrix}>0,$$

那么可得　$P^0={P^0}^T>0,\quad \begin{bmatrix} Q^0 & S^0 \\ {S^0}^T & R^0 \end{bmatrix}>0.$

故得证 $H({Z^0}^{-1})$ 也是严格正实的。

由定义1可知 $\frac{1}{\delta^2}-1$ 是 $H(Z^{-1})$ 的严格正实裕度。证毕。

由上述引理可以看出，严格正实裕度并不是唯一的。

定理1　当 $H(Z^{-1})$ 是严格正实的，且有严格正实裕度 $\frac{1}{\rho^2}$，$\inf\alpha_i>0$，$\rho^2\alpha_{i+1}\leq\alpha_i$，$i\in Z$，则有

$$\sum_{i=1}^{T}U_iY_i\alpha_{i+1}\geq\beta_0\sum_{i=1}^{T}U_i^2+\beta_1,$$

$$\sum_{i=1}^{T}U_iY_i\alpha_{i+1}\geq\beta_0'\sum_{i=1}^{T}Y_i^2+\beta_1',\qquad \forall T\in Z.$$

证　利用（1）、（2）、（3）式得

$$\sum_{i=1}^{T} U_i Y_i \alpha_{i+1} = \frac{1}{2}\left\{ X_{T+1}^T P X_{T+1} \alpha_{T+1} - X_1^T P X_1 \alpha_1 + \sum_{i=1}^{T} \begin{bmatrix} X_i \\ U_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ U_i \end{bmatrix} \alpha_{i+1} + \sum_{i=1}^{T} X_i^T P X_i (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \right\}.$$

令引理 2 证明中 $\delta = 1$，则有 $Z = Z^0$，即 $A = A^0$，$B = B^0$，$C = C^0$，$D = D^0$，上式可表示为

$$\sum_{i=1}^{T} U_i Y_i \alpha_{i+1} = \frac{1}{2}\left\{ X_{T+1}^T P X_{T+1} \alpha_{T+1} - X_1^T P X_1 \alpha_1 + \sum_{i=1}^{T} \begin{bmatrix} X_i \\ U_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q' & S' \\ S'^T & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ U_i \end{bmatrix} \alpha_{i+1} + \sum_{i=1}^{T} X_i^T P X_i (\alpha_i - \rho^2 \alpha_{i+1}) \right\}.$$

再利用定理 1 中条件即可从上式得证定理。证毕。

（此定理的某些思想可从文〔4〕中发现，那里给出了连续系统相应的某些结论）。

由上述定理可直接得到下述推论：

推论 1 i）若 $\inf \alpha_i > 0$，$\alpha_{i+1} \le \alpha_i$，$i \in Z$，那么，对于任何严格正实函数 $H(Z^{-1})$，无论它的严格正实裕度为多少，都满足定理 1 中的结论。

ii）若 $\inf \alpha_i > 0$，$i \in Z$，$H(Z^{-1}) = 1$，那么，对任意变化的 α_i，都满足定理 1 中的结论。

三、一类更广泛的自适应算法

为了简单起见，设对象是可由一阶延迟线性差分方程描述的系统：

$$A(Z^{-1}) Y_k = B(Z^{-1}) U_{k-1}, \tag{4}$$

$$A(Z^{-1}) = 1 + a_1 Z^{-1} + \cdots a_{\bar{n}} Z^{-\bar{n}} = 1 + Z^{-1} A^*(Z^{-1}),$$

$$B(Z^{-1}) = b_1 + b_2 Z^{-1} + \cdots + b_{\bar{m}} Z^{-\bar{m}+1}, \quad b_1 \ne 0,$$

存在已知量 n，m，使得 $n \ge \bar{n}$，$m \ge \bar{m}$。

取　$e_k^0 = Y_k - Y_{Mk} = Y_k - \phi_{k-1}^T \hat{\theta}_{k-1}$，　　(5)

$$e_k = Y_k - \hat{Y}_k = Y_k - \phi_{k-1}^T \hat{\theta}_k = H_1(Z^{-1})(-\phi_{k-1}^T \tilde{\theta}_k), \tag{6}$$

这里 $\tilde{\theta}_k = \hat{\theta}_k - \theta_0$，

$$H_1(Z^{-1}) = \frac{H_1^0(Z^{-1})}{H_1^0(Z^{-1})}$$ 是已知传递函数。并有

$$H_1^0(Z^{-1}) = 1 + h_{11}Z^{-1} + \cdots + h_{1n_1} Z^{-n_1} = 1 + Z^{-1}H_1^*(Z^{-1}),$$

$$H_2^0(Z^{-1}) = 1 + h_{21}Z^{-1} + \cdots + h_{2n_2} Z^{-n_2} = 1 + Z^{-1}H_2^*(Z^{-1}).$$

令　$[H_1^*(Z^{-1}) - H_2^*(Z^{-1})]\hat{Y}_{k-1} = f_{k-1}$，

从（4）、（6）可得

$$\phi_{k-1}^T = \frac{1}{H_1^0(Z^{-1})}[Y_{k-1}\cdots Y_{k-l}, U_{k-1}\cdots U_{k-n}, f_{k-1}],\quad l = \max[n_2, n],$$

$$\hat{\theta}_k^T = [h_{21} - \hat{a}_{1k}\cdots h_{2l} - \hat{a}_{lk},\ \hat{b}_{1k}\cdots \hat{b}_{mk},\ 1],$$

$$\theta_0^T = [h_{21} - a_1\cdots h_{2l} - a_l,\ b_1\cdots b_m,\ 1],$$

这 里 $i > n_2$，$h_{2i} = 0$，$i > \overline{n}$，$a_i = 0$，$i > \overline{m}$，$b_i = 0$。

取自适应算法满足优化指标

$$J_N = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N}\prod_{j=i+1}^{N} \lambda_{1j-1}\lambda_{2i-1}(Y_i - \phi_{i-1}^T \hat{\theta}_N)^2\right]. \tag{7}$$

（此优化指标是常用的有时变加权因子的二次型指标，其优点是：①利用时变因子可对不同时间控制效果的强调程度不同；②控制算法是线性的。）

由 $\dfrac{dJ_N}{d\hat{\theta}_N} = 0$，可得对应于这个优化指标的算法：

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \lambda_{2k-1} F_k \phi_{k-1} e_k^0, \tag{8}$$

$$F_k^{-1} = \lambda_{1k-1} F_{k-1}^{-1} + \lambda_{2k-1}\phi_{k-1}\phi_{k-1}^T, \tag{9}$$

利用验后误差（6）式，则有

$$e_k = \frac{\lambda_{1k-1} e_k^0}{\lambda_{1k-1} + \lambda_{2k-1} \phi_{k-1}^T F_{k-1} \phi_{k-1}}. \tag{10}$$

（8）式可写成

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\lambda_{2k-1}}{\lambda_{1k-1}} F_{k-1} \phi_{k-1} e_k$$

$$= \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\lambda_{2k-1}}{\lambda_{1k-1}} F_{k-1} \phi_{k-1} H_1(Z^{-1})(-\phi_{k-1}^T \tilde{\theta}_k). \tag{11}$$

令 $\dfrac{\lambda_{2k-1}}{\lambda_{1k-1}} = \alpha_{k+1}$，从（11）式可得等效反馈系统图(图 1)。

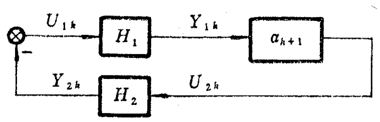

图 1

这里，$Y_{1k} = U_{2k} = e_k$，$Y_{2k} = -U_{1k} = \phi_{k-1}^T \tilde{\theta}_k$。

根据文献〔1〕，Landau 给出的自适应算法如下：

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + Y_{k-1} F_k \phi_{k-1} e_k^0, \tag{12}$$

$$F_k^{-1} = \lambda_{1k-1} F_{k-1}^{-1} + \lambda_{2k-1} \phi_{k-1} \phi_{k-1}^T \tag{13}$$

$$r_{k-1} = \frac{\lambda_{1k-1} + \lambda_{2k-1} \phi_{k-1}^T F_{k-1} \phi_{k-1}}{1 + \phi_{k-1}^T F_{k-1} \phi_{k-1}}. \tag{14}$$

这里，$0 < \varepsilon \le \lambda_{1k} < 1$，$0 \le \lambda_{2k} \le \lambda < 2$，$k \in Z$。

利用验后误差理论，（12）式可写成

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + F_{k-1}\phi_{k-1} e_k = \hat{\theta}_{k-1} + F_{k-1}\phi_{k-1} H_1(Z^{-1})(-\phi_{k-1}^T \tilde{\theta}_k). \tag{15}$$

比较算式（11）、（15），可以看出，（15）式等效反馈系统图也就是缺少 α_{k+1} 项的图 1。

根据文献〔1〕可知，Landau 给出的自适应算法在一定条件下用作辨识或控制是稳定的。

然而，在优化指标（7）式的意义下，我们应该选择算法（11），因为（11）式算法是唯一可使优化指标（7）式达到最小的算法（Goodwin 的加权最小二乘法是符合指

标（7）的一个特例）。对更一般的情况，许多自适应算法都可以转化为图1形式中没有 α_{k+1} 项的反馈系统。如最小二乘法，Lin的辅助法[7]，它们的稳定性证明均可用超稳定性理论来解决，其基本原理是利用图1的 $\sum_{i=1}^{T} U_{2i}Y_{2i} \geq \beta_1$ 和 $H_1(Z^{-1})$ 严格正实的特性。

为使上述算法适应于更广泛的优化指标，我们在这些算法中也可引入时变为子 α_i，这时，等效反馈系统就是图1的形式，H_1、H_2 与未引入 α_i 前相同，因此 α_i 的引入增加了自适应算法的选择范围，使其可适用的优化指标较原先的更为广泛。下面讨论它们的稳定性问题。

四、算法稳定性的证明

对于图1形式的等效反馈系统有下述定理成立：

定理2　已知 $\sum_{i=1}^{T} U_{2i}Y_{2i} \geq \beta_1$，$H_1(Z^{-1})$ 严格正实且有严格正实裕度 $\frac{1}{\rho^2}-1$，$\rho \in [0,1]$，当 α_i 满足条件 $\rho^2\alpha_{i+1} \leq \alpha_i$，$\inf \alpha_i > 0$，则有 $U_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$，$Y_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$。

证　由于 $\sum_{i=1}^{T} U_{2i}Y_{2i} \geq \beta_1$，根据图1，则有

$$\sum_{i=1}^{T} U_{1i}Y_{1i}\alpha_{i+1} \leq -\beta_1 .$$

由定理1可得　$\sum_{i=1}^{T} U_{1i}^2 \leq -\beta_1'$，$\sum_{i=1}^{T} Y_{1i}^2 \leq -\beta_1''$。

故有结论 $U_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$，$Y_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$。证毕。

利用上述定理可证明第三节中所述的那类引入 α_i 因子后的自适应算法的稳定性。下面以算法（11）为例，具体地讨论其稳定性。

定理3　当 $0 < \varepsilon \leq \lambda_{1k} \leq 1$，$0 < \varepsilon \leq \lambda_{2k} \leq \lambda < \infty$，$k \in Z$，$H_1 - \frac{1}{2}$ 是严格正实的且有严格正实裕度 $\frac{1}{\rho^2}-1$，且已知

$$\frac{\lambda_{2k+1}}{\lambda_{1k+1}}\rho^2 \le \frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{1k}}，则有 U_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\ Y_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

证　作出算式（11）的等效框图（图2）。

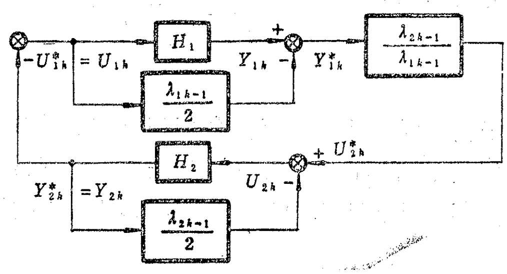

图 2

由文献〔1〕可知，$\sum_{i=1}^{T} U^*_{2k}\ Y^*_{2k} \ge \beta_1,\ \forall T\in Z$。

所以，利用定理2，可得 $U^*_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\ Y^*_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$。

又因为 $\lambda_{1k}\le 1$，所以有 $Y_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\ U_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$。证毕。

注意：这里的 U_{1k}、Y_{1k} 是等同于文献〔1〕中的量。故利用文献〔1〕中的证明，上述算法也有下述结论：

1. 若此算法用于辨识，并满足下述条件：①被辨识系统的输入是 $n+m$ 阶持续激励的；②被辨识系统是渐近稳定的；③$F_k^{-1}\ge \varepsilon I>0$，则有 $|\phi_k|\le\beta_0$，$\tilde{\theta}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$。

2. 若此算法用于控制，并满足下述条件：①$|Y_{Mk}|\le\beta_0$；②$B(Z^{-1})$的零点位于单位圆内；③$F_k^{-1}\ge \varepsilon I>0$，则有 $e_k^0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$，$|\phi_k|$，$|\tilde{\theta}_k|\le\beta_0$。

所以，算法（11）是可以用作辨识和控制的。

从前面的稳定性证明可以看出，利用定理2同样可以解决最小二乘法和Lin的辅助法[7]引入时变子 α_i 后的算法的稳定性证明。

由第二节中的推论我们还可以得到如下结论：

i）任何上述引入 α_i 后的算法，若有条件 $\alpha_i\ge\alpha_{i+1}$，$\inf\alpha_i>0$，那么对于任意严格正实函数 $H_1(Z^{-1})$，算法的稳定性都可得到保证。

ii）任何上述引入 α_i 后的算法，若有条件 $H(Z^{-1})\equiv 1$，$\inf\alpha_i>0$，那么对于任意变化的 α_i，算法的稳定性都可得到保证。

可以发现，Goodwin的投影法、加权最小二乘法和文献〔2〕中的有关算法都属于上述结论。

五、结　束　语

本文利用严格正实裕度理论解决了一类更为广泛的自适应算法的稳定性证明。凡是可以化为等效反馈系统图1缺少α_{k+1}项的自适应算法，均可作上述引入α_i项的工作，并得到相应的结论。α_i引入的优点是扩大了自适应算法适用的优化指标集。

上面讨论的基本原理可以用于H_1是线性时变的系统，这时H_1的内特性是利用严格无源[4]和严格无源裕度来度量的。另外，由于超稳定性理论可以应用于随机自适应算法的稳定性证明，所讨论的原理对随机自适应算法亦是适合的。

参　考　文　献

〔1〕 Landau, I. D. and Lozano R., Unification of Discrete Time Explicit Model Reference Adaptive Control Designs, Automatica, 17, (1981), 593—611.

〔2〕 Ljung, L., On the Positive Condition in Adaptive Control, IFAC, (1981), 27—35.

〔3〕 Egardt, Bo, Unification of Some Discrete-Time Adaptive Control Schemes, IEEE Trans., AC—**25**, (1980), 693—697.

〔4〕 Desoer, C. M. and Vidyasagar, M., Feedback Systems, Input-output Properties, Academic Press, New York, (1975).

〔5〕 Landau, I. D., Adaptive Control-The Model Reference Approach, Marcel Dekker, Inc. New York, (1979).

〔6〕 Hitz, L. and Anderson, B. P. O., Discrete Positive Real Functions and Their Application to System Stability, PROC IEE, 116, (1969), 153—155.

〔7〕 Lin, Y. H. and Narendra, K. S., New Error Model for Adaptive Systems, IEEE, Trans., AC—**25**, (1980), 585—587.

REMAINDER OF STRICTLY POSITIVE REAL TRANSFER FUNCTION AND ITS APPLICATION

He Qinfen, Si Wei

(Nanjing Institute of Technology)

Abstract

Based on the further study of the inner character of strictly positive real transfer function of discrete system, it's shown that the stability of a more applicable set of discrete adaptive algorithms can be proved by using the theory of remainder of strictly positive real.