第4卷 第1期
1987年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.4, No.1
March, 1987

广义系统的受限能控性*

程兆林　张纪锋

（山东大学）

摘　　要

本文讨论广义系统在控制能量或幅值受限下的状态能控性，得到了充要条件。这一充要条件指出，广义系统在控制受限下的能控性不仅取决于它的慢子系统的能控性，并且还取决于慢子系统的特征根的分布。

一、引　　言

下述系统：

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.1}$$

称为广义系统，其中 $x\in R^n$，$u\in R^r$，$E,A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times r}$，E,A,B 均为常阵，并且 E 为奇异阵，E,A 满足 $\det[sE-A]\not\equiv 0$。广义系统的早期文献见于 Rosenbrock[1]，他主要研究了系统的分解和解的结构。随后，Verghese 等[2]引入了强能控、强能观概念及判别准则，Cobb[3]讨论了状态反馈、极点配置等工程设计问题。不少文献[4],[5]指出，广义系统在电网络分析及社会经济领域有着广泛的应用。

鉴于以往的文献都是在控制函数 u 不受任何限制的情况下讨论的，而实际系统中的 u 总是要受到各种限制，因此，讨论广义系统在受限控制作用下的性态有着明显的实际意义，本文基于此展开对控制能量或幅值受限下系统状态能控性的讨论，阐明充要条件。

二、广义系统在控制能量或幅值受限下的状态能控性

文献〔1〕指出，系统（1.1）总可以 r. s. e. (restricted system equivalent)等价于下述系统

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u, & (2.1)\\ N\dot{x}_2 = x_2 + B_2u, & (2.2)\end{cases}$$

---

*此项研究系中国科学院科学基金会资助项目。

本文于1985年6月4日收到。1986年6月2日收到修改稿。

式中 $x_1\in R^{n_1}$，$x_2\in R^{n_2}$，$n_1+n_2=n$，$u\in R^r$，A_1，E_1，B_2，N 为相应阶数的常阵，且 N 为幂零阵，幂零指数为 ν. 所谓系统（1.1）r. s. e. 等价于系统 Σ 是指存在满秩常阵 P，Q，P，P，$Q\in R^{n\times n}$，实现

$$P[sE-A]Q=\begin{bmatrix} sI_{n_1}-A_1 & \\ & sN-I_{n_2}\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$PB=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2\end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

显然，r. s. e. 等价是由下列两种变换实现的：

（i）对（1.1）实行满秩行变换，变换阵为 P；

（ii）对（1.1）的状态实行满秩变换，变换阵为 Q. 鉴于这两种变换不会改变系统的代数结构，因此，讨论系统（1.1）在控制受限下的状态能控性可以以讨论系统 Σ 在控制受限下的状态能控性来替代. Σ 由状态不相耦合的两个子系统构成，其中（2.1）是正常的线性系统，称为 Σ 的慢子系统，（2.2）的解带有脉冲特性，称为 Σ 的快子系统.

定义 2.1 设系统（1.1），L 为某一指定的正数. 若对于初值 $x(0^-)=x_0$，存在控制 u，u 满足

$$\int_0^{T(x_0)} u^\tau u dt\le L, \tag{2.5}$$

或满足

$$\|u\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{r} u_i^2}\le L, \tag{2.6}$$

式中 u_i 为 u 的第 i 个分量，经 u 在 $[0,T(x_0)]$ 作用，将 x_0 引导到 $x(T(x_0))=0$，则称 x_0 为控制能量受限下或控制幅值受限下能控状态.

定义 2.2 若系统（1.1）的任一状态 x_0 为控制能量（控制幅值）受限下能控状态，则称系统（1.1）在控制能量（控制幅值）受限下状态能控.

引理 2.1[6] 设 C 为复方阵，令

$$W_k=I+C\overline{C}^\tau+\cdots+C^{k-1}[\overline{C}^{k-1}]^\tau, \tag{2.7}$$

式中 $\overline{C}^\tau$ 为 C 的共轭转置矩阵，则当 $k\to\infty$ 时 $W_k^{-1}\to 0$ 的充要条件为 C 的任一特征根 λ_j 满足 $|\lambda_j|\ge 1$.

引理 2.2[6] 设线性系统

$$\dot{x}=Ax+Bu, \tag{2.8}$$

式中 $A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times r}$，A,B 为常阵，则系统（2.8）在控制能量或控制幅值受限下状态能控的充要条件为

$1°$ $\mathrm{rank}[B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B]=n$;

$2°$ A的任一特征根无正实部.

引理 2.3 设系统(2.1)状态能控，m,n_0为任二自然数，令

$$f_{m,n_0}(t)=\begin{cases} t^m(1-t)^m, & t\in[0,1] \\ (t-1)^m(2-t)^m, & t\in[1,2] \\ \vdots & \\ (t-n_0+1)^m(n_0-t)^m, & t\in[n_0-1,n_0], \end{cases} \tag{2.9}$$

则矩阵

$$W[f_{m,n_0},\ 0,n_0]=\int_0^{n_0} f_{m,n_0}^2(t)[e^{-A_1t}B_1][e^{-A_1t}B_1]^\tau dt \tag{2.10}$$

正定，并且，存在正数$\alpha_i(m)$，$\beta_i(m)(i=1,2)$满足

$$\alpha_1(m)W[f_{m,n_0},0,n_0]\le W[f_{2m,n_0},0,n_0]\le\beta_1(m)W[f_{m,n_0},0,n_0], \tag{2.11}$$

$$\alpha_2(m)W(n_0)\le W[f_{m,n_0},0,n_0]\le\beta_2(m)W(n_0), \tag{2.12}$$

式中

$$W(n_0)=\sum_{i=0}^{n_0-1} e^{-A_1 i}[e^{-A_1 i}]^\tau. \tag{2.13}$$

证明从略.

文献[3]指出，若广义系统Σ如(2.1)、(2.2)所示，初值为$x(0^-)=[x_{10}^\tau\ x_{20}^\tau]^\tau$，并且$u$有直到$\nu-1$阶连续导数，$u$满足

$$u(0)=u^{(1)}(0)=\cdots=u^{(\nu-1)}(0)=0, \tag{2.14}$$

则其解为

$$x_1(t)=e^{A_1t}x_{10}+\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1u(\tau)d\tau, \tag{2.15}$$

$$x_2(t)=-\sum_{i=0}^{\nu-2}N^{i+1}\delta^{(i)}(t)x_{20}-\sum_{i=0}^{\nu-1}N^iB_2u^{(i)}(t), \tag{2.16}$$

式中$u^{(i)}(t)$表示$u(t)$的第i阶导数，$\delta^{(i)}(t)$表示Dirac$-\delta$函数$\delta(t)$的第i阶导数. 从(2.16)可以看出，尽管$x_2(t)$在$t=0$带有脉冲特性，但在$t>0$，$x_2(t)$的值却是仅依赖于$u^{(i)}(t)(i=0,1,\cdots,\nu-1)$的，因此，只要控制函数$u$能把$x_1(t)$由$x_{10}$引导到$x_1(T(x_0))=0$，并且$u$足够光滑，满足$u^{(i)}(0)=0$，$u^{(i)}(T(x_0))=0$，$i=0,1,\cdots,\nu-1$，$u$就能把$x(t)$由$x(0^-)=[x_{10}^\tau\ x_{20}^\tau]^\tau$引导到$x(T(x_0))=0$.

定理 2.1 广义系统(1.1)在控制能量受限下状态能控的充要条件为它的r.s.e等价系统Σ满足

1° 慢子系统(2.1)状态能控;

2° 慢子系统(2.1)无正实部特征根.

证 只须对系统Σ给出证明.

必要性: 设Σ是控制能量受限下状态能控的,则它的子系统(2.1)也是控制能量受限下状态能控的,将引理2.2应用于系统(2.1)即得所证.

充分性: 设$x(0^-)=[x_{10}^\tau\ \ x_{20}^\tau]^\tau$, $x_{10}\in R^{n_1}$, $x_{20}\in R^{n_2}$,作控制函数$u(t)$:

$$u(t)=-f_{\nu,n_0}^2(t)[e^{-A_1t}B_1]^\tau W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]x_{10}, \tag{2.17}$$

式中 $f_{\nu,n_0}(t)$如(2.9)所示,ν为N阵的幂零指数,$W[f_{\nu,n_0},0,n_0]$如(2.10)所示,n_0为待定自然数,其值将在证明过程中由$x(0^-)$及控制能量的限值L确定.显然,$u(t)$在区间$[0,n_0]$有直到$\nu-1$阶连续导数,并且

$$u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1)=\cdots=u^{(i)}(n_0)=0,\ i=0,1,\cdots\nu-1. \tag{2.18}$$

由(2.15)、(2.16)知,$u(t)$把$x(t)$由$x(0^-)$引导到$x(n_0)=0$.

下面考察$u(t)$在$[0,n_0]$的能量值.因$x_{10}=0$时$u\equiv 0$,故只须对$x_{10}\neq 0$讨论之.注意到

$$\int_0^{n_0}u^\tau u dt=x_{10}^\tau W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,\ n_0]$$

$$\cdot\int_0^{n_0}f_{\nu,n_0}^4(t)[e^{-A_1t}B_1][e^{-A_1t}B_1]^\tau dt\cdot W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]x_{10}, \tag{2.19}$$

以及

$$f_{\nu,n_0}^2(t)=f_{2\nu,n_0}(t), \tag{2.20}$$

将(2.20)代入(2.19),并应用(2.11)、(2.12),推得

$$\int_0^{n_0}u^\tau u dt=x_{10}^\tau W^{-1}[f_{\nu,n_0},\ 0,n_0]\int_0^{n_0}f_{2\nu,n_0}^2(t)[e^{-A_1t}B_1][e^{-A_1t}B_1]^\tau dt$$

$$\cdot W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]x_{10}=x_{10}^\tau W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]W[f_{2\nu,n_0},0,n_0]$$

$$\cdot W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]x_{10}\le\beta_1(\nu)x_{10}^\tau W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]x_{10}$$

$$\le\frac{\beta_1(\nu)}{\alpha_2(\nu)}\ \mathrm{trace}\,W^{-1}(n_0)\,||x_{10}||^2. \tag{2.21}$$

定理的条件指出A_1的特征根无正实部,故e^{-A_1}的特征根不在单位圆内,应用引理

2.1，即得$W^{-1}(n_0)\to 0(n_0\to\infty)$，等价地 trace $W^{-1}(n_0)\to 0(n_0\to\infty)$. 因此，在控制能量的限值 L 给定之后，针对$x(0^-)$，选择足够大的n_0，使得

$$\operatorname{trace} W^{-1}(n_0)\le \frac{\alpha_2(\nu)L}{\|x_{10}\|^2\beta_1(\nu)},$$

并将此n_0作为(2.17)中待定之n_0，即得

$$\int_0^{n_0} u^\tau u dt\le L.$$

此即$u(t)$能量受限，加之$u(t)$将$x(t)$由$x(0^-)$引导到$x(n_0)=0$，并且$x(0^-)$是任意给定的，故系统Σ在控制能量受限下状态能控. 系统(1.1)亦然.

引理 2.4 设系统(2.1)状态能控，令

$$W^*[m,T,n_1]=\sum_{k=0}^{n_1-1}\left[\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^m((k+1)T-t)^m e^{-A_1t}B_1dt\right]$$

$$\cdot\left[\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^m((k+1)T-t)^m e^{-A_1t}B_1dt\right]^\tau, \tag{2.22}$$

$$e=e_1\cup e_2, \tag{2.23}$$

$$e_1=\left\{\theta\,|\,\theta=\frac{2k\pi}{\operatorname{Im}[\lambda_i-\lambda_j]},\quad \begin{array}{l}k=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ \lambda_i,\lambda_j\text{ 为 }A_1\text{ 具有不同}\\ \text{虚部的任二特征根.}\end{array}\right\}, \tag{2.24}$$

$$e_2=\bigcup_{m=1}^{\infty} e_2(m), \tag{2.25}$$

$$e_2(m)=\left\{\theta\,\Big|\,\int_0^\theta t^m(\theta-t)^m e^{\lambda_j t}dt=0,\quad \begin{array}{l}\lambda_j\text{ 为 }A_1\text{ 的}\\ \text{任一特征根.}\end{array}\right\}, \tag{2.26}$$

式中n_1为系统(2.1)的状态维数，m为任一正整数，T为任一正数，则e必为可列集，并且，当$T\in(0,\infty)-e$时，$W^*[m,T,n_1]$正定.

证 (i)证e为可列集. 显然，e_1为可列集，下证$e_2(m)$为可列集. 记

$$\psi_{m,j}(\theta)=\int_0^\theta t^m(\theta-t)^m e^{\lambda_j t}dt, \tag{2.27}$$

由

$$\frac{d^{m+1}}{d\theta^{m+1}}\psi_{m,j}(\theta)=m!\theta^m e^{\lambda_j\theta}, \tag{2.28}$$

知

$$\psi_{m,j}(\theta)=\varphi_1(\theta)e^{\lambda_j\theta}+\varphi_2(\theta), \tag{2.29}$$

式中 $\varphi_1(\theta)$、$\varphi_2(\theta)$为θ的复系数多项式，且不同时恒等于零. 式(2.29)说明$\psi_{m,j}(\theta)$的零点集合至多为可列集，因此，集$e_2(m)$及集e_2，e均为可列集.

（ii）证 $T\in(0,\infty)-e$ 时 $W^*[m,T,n_1]$ 正定．记

$$G=e^{A_1T},\tag{2.30}$$

$$H_0(m)=\int_0^T t^m(T-t)^m e^{A_1t}dt,\tag{2.31}$$

$$H(m)=H_0(m)B_1,\tag{2.32}$$

将 $W^*[m,T,n_1]$ 改写为

$$W^*[m,T,n_1]=\sum_{k=0}^{n_1-1}G^{-(k+1)}H(m)[G^{-(k+1)}H(m)]^{\tau}.\tag{2.33}$$

显然，要证 $W^*[m,T,n_1]$ 正定，只须证线性离散系统 $[G,H(m)]$ 状态能控．下证当 $T\in(0,\infty)-e$ 时系统 $[G,H(m)]$ 状态能控．为此，考察其能控性矩阵的秩，注意到 $H_0(m)$ 与 G 乘积可交换，得

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}[H(m)\ \ GH(m)\cdots G^{n_1-1}H(m)]\\&=\operatorname{rank}H_0(m)[B_1\ GB_1\cdots G^{n_1-1}B_1].\end{aligned}\tag{2.34}$$

文献[7]指出，当系统（2.1）状态能控，且 $T\in(0,\infty)-e_1$ 时，线性离散系统 $[G,B_1]$ 状态能控，即

$$\operatorname{rank}[B_1\ \ GB_1\cdots G^{n_1-1}B_1]=n_1,\tag{2.35}$$

故为证系统 $[G,H(m)]$ 状态能控，只须证 $H_0(m)$ 满秩．由

$$\begin{aligned}\det H_0(m)&=\det\int_0^T t^m(T-t)^m e^{A_1t}dt\\&=\prod_{j=1}^{n_1}\int_0^T t^m(T-t)^m e^{\lambda_jt}dt,\end{aligned}\tag{2.36}$$

式中 λ_j 为 A_1 的特征根，推得当 $T\in(0,\infty)-e_2$ 时 $H_0(m)$ 满秩，因此，当 $T\in(0,\infty)-e$ 时系统 $[G,H(m)]$ 状态能控．此即 $W^*[m,T,n_1]$ 正定．

引理 2.5　设系统（2.1）状态能控，e 如（2.23）所示，$T\in(0,\infty)-e$，令

$$\begin{aligned}W^*[m,T,N^*]=\sum_{k=0}^{N^*-1}&\left[\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^m((k+1)T-t)^m e^{-A_1t}B_1dt\right]\\&\cdot\left[\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^m((k+1)T-t)^m e^{-A_1t}B_1dt\right]^{\tau},\end{aligned}\tag{2.37}$$

$$W^*(N)=\sum_{j=0}^{N-1}e^{-jA_1n_1T}[e^{-jA_1n_1T}]^{\tau},\tag{2.38}$$

式中　$N^*=n_1N$，n_1 为系统(2.1)的状态维数，N 为任一自然数，则 $W^*[m,T,N^*]$ 正

定，并且，存在正数 $\alpha(m,T)$，$\beta(m,T)$，满足

$$\alpha(m,T)W^*(N)\le W^*[m,T,N^*]\le\beta(m,T)W^*(N). \qquad (2.39)$$

证明从略．

定理 2.2 广义系统（1.1）在控制幅值受限下状态能控的充要条件为它的 r.s.e. 等价系统Σ满足

1° 慢子系统（2.1）状态能控；

2° 慢子系统（2.1）无正实部特征根．

证　只须对系统Σ给出充分性证明．令 e 如（2.23）所示，在（0,1）$-e$ 中任意选定 T 值，并记

$$H=H(\nu)=\int_0^T t^\nu (T-t)^\nu e^{A_1 t} B_1 dt, \qquad (2.40)$$

式中 ν 为快子系统(2.2)的 N 阵的幂零指数．对于初值 $x(0^-)=[x_{10}^\tau\ \ x_{10}^\tau]^\tau$，作控制函数

$$u(t)=\begin{cases} u_0(t), & t\in[0,T], \\ u_1(t), & t\in[T,2T], \\ \ \vdots & \\ u_{N^*-1}(t), & t\in[(N^*-1)T,N^*T], \end{cases} \qquad (2.41)$$

$$u_k(t)=-(t-kT)^\nu((k+1)T-t)^\nu[e^{-(k+1)A_1T}H]^\tau\cdot W^{*-1}[\nu,T,N^*]x_{10}, \quad t\in[kT,(k+1)T],$$
$$k=0,1,\cdots,N^*-1, \qquad (2.42)$$

式中 $W^*[\nu,T,N^*]$如（2.37）所示，$N^*=n_1N$，N 为待定自然数，其值将在证明过程中由 $x(0^-)$及控制幅值的限值 L 确定．显然，$u(t)$在区间$[0,N^*T]$有直到 $\nu-1$ 阶连续导数，并且

$$u^{(i)}(0)=u^{(i)}(T)=\cdots=u^{(i)}(N^*T)=0,\ \ i=0,1,\cdots\nu-1. \qquad (2.43)$$

由（2.15）、（2.16），并注意到

$$e^{-(k+1)A_1T}H=e^{-(k+1)A_1T}\int_0^T t^\nu(T-t)^\nu e^{A_1(T-t)}B_1dt$$
$$=\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^\nu((k+1)T-t)^\nu e^{-A_1t}B_1dt, \qquad (2.44)$$

$$\sum_{k=0}^{N^*-1}\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^\nu((k+1)T-t)^\nu e^{-A_1t}B_1dt[e^{-(k+1)A_1T}H]^\tau$$
$$=W^*[\nu,T,N^*], \qquad (2.45)$$

推得 $u(t)$ 将$x(t)$由 $x(0^-)$引导到 $x(N^*T)=0$．

下面估计$\|u(t)\|$. 因$x_{10}=0$时$u(t)\equiv 0$, 故只须对非零的x_{10}估计$\|u(t)\|$. 设t为$[0,N^*T]$内任一值, $t\in[kT,(k+1)T]$, 由$u(t)$定义, 得

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2&=\|u_k(t)\|^2\\&=(t-kT)^{2\nu}((k+1)T-t)^{2\nu}\|[e^{-(k+1)A_1T}H]^\tau W^{*-1}[\nu,T,N^*]x_{10}\|^2.\end{aligned}\tag{2.46}$$

注意到$T\in(0,1)-e$, 故

$$(t-kT)^{2\nu}((k+1)T-t)^{2\nu}\le\left(\frac{T}{2}\right)^{4\nu}\le 1.\tag{2.47}$$

因此, 由(2.46)~(2.47), (2.44)~(2.45)及(2.39)推得

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2&\le\|[e^{-(k+1)A_1T}H]^\tau W^{*-1}[\nu,T,N^*]x_{10}\|^2\\&\le\sum_{k=0}^{N^*-1}\|[e^{-(k+1)A_1T}H]^\tau W^{*-1}[\nu,T,N^*]x_{10}\|^2\\&=x_{10}^TW^{*-1}[\nu,T,N^*]x_{10}\\&\le\frac{1}{\alpha(\nu,T)}\operatorname{trace}W^{*-1}(N)\|x_{10}\|^2.\end{aligned}\tag{2.48}$$

定理的条件指出A_1的特征根无正实部, 故$e^{-A_1n_1T}$的特征根不分布在单位圆内, 应用引理2.1, 得$\operatorname{trace}W^{*-1}(N)\to 0(N\to\infty)$. 因此, 在控制幅值的限值$L$给定之后, 针对$x(0^-)$, 选择足够大的$N$, 使得

$$\operatorname{trace}W^{*-1}(N)\le\frac{L^2}{\|x_{10}\|^2}\alpha(\nu,T),$$

并将此N作为(2.41)中待定之N, 即得

$$\|u(t)\|\le L.$$

此即$u(t)$幅值受限, 加之$u(t)$将$x(t)$由$x(0^-)$引导到$x(N^*T)=0$, 并且$x(0^-)$是任意给定的, 故系统Σ在控制幅值受限下状态能控. 系统(1.1)亦然.

参 考 文 献

[1] Rosenbrock, H., Structural Properties of Linear Dynamical Systems, Int. J. Contr., **20**, 2,(1974), 191-262.

[2] Verghese, G, Levy, B. and Kailath, T., A Generalized State-Space for Singular Systems, IEEE. Trans., AC-**26**, 4,(1981), 811-831.

[3] Cobb, D., Feedback and Pole Placement in Descriptor Variable Systems, Int. J. Contr., **33**, 6,(1981), 1135-1146.

[4] Rosenbrock, H., Non-minimal LCR Multiports, Int. J. Contr., **20**, 1,(1974), 1-16.

[5] Luenberger, D. and Arbel, A., Singular Dynamic Leontief Systems, Econometrica, (1977).

[6] Zhao, K., Chen, Z. and Cheng, Z., Complete Controllability for Linear Constant Systems with Control Constraints, Proceedings of 9th World Congress of the International Federation of Automatic Control, **5**, (1984), 7-11.

[7] 关肇直、陈翰馥，线性控制系统的能控性和能观测性，科学出版社（1975）。

COMPLETE CONTROLLABILITY OF GENERALIZED STATE-SPACE SYSTEMS WITH CONTROL CONSTRAINED

Cheng Zhaolin, Zhang Jifeng

(Shandong University, Jinan)

Abstract

In this paper, a necessary and sufficient condition for the state complete controllability of generalized state-space systems with control energy or control amplitude constrained is obtained. This condition shows that the complete controllability of generalized state-space systems with control constrained depends on not only the complete controllability of its slow subsystems, but also the distribution of the eigenvalues of its slow subsystems.