

包含延时的采样系统的最优控制

李 卫 孙增圻

(北京信息和控制研究所) (清华大学, 北京)

摘 要

对于控制变量含时间延迟的线性系统, 当采用计算机进行采样控制时, 受控对象是连续的, 由计算机实现的控制器是离散的. 在给定连续性能指标函数, 并且不限制延迟时间是采样周期的整数倍的条件, 本文给出了这种系统的线性二次型最优设计的算法, 同时给出了最优控制存在的充分条件, 最后举例说明其实际应用.

一、引 言

在计算机控制系统中, 控制对象中常常可能包含一定的延时, 如工业过程中的管道传输、热传导等. 此外, 在数字控制器中, A/D转换和D/A转换、控制规律的计算也都需要一定时间(它们统称为计算延时), 当计算延时与采样周期相比很小时, 通常可忽略它的影响. 但当计算延时不可忽略时, 则在系统设计时便需考虑它的影响. 对于包含有延时的控制系统, 在经过离散化变换后^[1]可变成形式上不带延时的标准离散状态方程, 因此可以采用任何离散系统的设计方法来对它进行设计. 为了使系统具有满意的连续动态响应性能, 目标函数取连续形式将更能反映对实际系统的性能要求. 本文就是讨论目标函数取连续的二次型函数时含延时的采样系统的最优控制问题.

二、问题的描述

给定连续的控制对象及二次型性能指标函数:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \lambda), \quad x(0) \text{ 给定}, \quad (1)$$

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) \bar{Q}_1 x(t) + u^T(t) \bar{Q}_2 u(t)] dt, \quad (2)$$

其中 x 为 n 维状态向量, u 为 m 维控制向量, \bar{Q}_1 是非负定对称阵, \bar{Q}_2 是正定对称阵, λ 是延迟时间, 它可能表示控制对象的实际延时, 也可能是控制器的计算延时的等效表

示。一般地, λ 可以表示为

$$\lambda = LT' - \bar{m}, \quad (3)$$

其中 L 是大于零的整数, $0 \leq \bar{m} < T$, T' 是采样周期。式(3)表示了延迟时间 λ 不一定是采样周期 T 的整数倍的一般情况。当 λ 表示计算延时, 应有 $L=1$, 计算延时 $\lambda = T - \bar{m}$ 。同时也假定在连续的控制对象和离散的控制器的连接采用零阶保持器连接, 即

$$u(t) = u(k), \quad kT \leq t < (k+1)T. \quad (4)$$

要求设计离散的控制, 它使式(2)所示的 J 极小。当 $\bar{m}=0$ 时, 它表示延迟时间是采样周期的整数倍, 这时的计算将比较简单, 下面首先讨论这种情况。

三、延迟时间是采样周期的整数倍的情况 ($\bar{m}=0$)

当 $\bar{m}=0$ 时, 式(1)可以离散化为^[1]:

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k-l), \quad (5)$$

其中 $F = e^{AT}$, $G = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B$, 式(2)可以表示为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} J_k, \quad (6)$$

其中

$$J_k = \int_{kT}^{(k+1)T} [x^T(t) \bar{Q}_1 x(t) + u^T(t) \bar{Q}_2 u(t)] dt. \quad (7)$$

根据式(1), 当 $kT \leq t < (k+1)T$ 时可以解得

$$x(t) = e^{A(t-kT)} x(k) + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)} d\tau Bu(k-l). \quad (8)$$

将上式代入式(7)及(6), 并化简, 得到

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k) Q_1 x(k) + 2x^T(k) Q_{12} u(k-l) + u^T(k-l) Q_2^1 u(k-l) + u^T(k) Q_2^2 u(k)], \quad (9)$$

其中

$$Q_1 = \int_0^T F^T(t) \bar{Q}_1 F(t) dt, \quad (10)$$

$$Q_{12} = \int_0^T F^T(t) \bar{Q}_1 G(t) dt, \quad (11)$$

$$Q_2^1 = \int_0^T G^T(t) \bar{Q}_1 G(t) dt, \quad (12)$$

$$Q_2^2 = \bar{Q}_2 T, \quad (13)$$

这里 $F(t)$ 和 $G(t)$ 的意义如下式所示

$$F(t) = e^{At}, \quad G(t) = \int_0^t e^{A\tau} d\tau B. \quad (14)$$

离散化参数 F, G, Q_1, Q_{12} 和 Q_2^1 可以利用〔2〕的算法进行计算。为了将式(5)和式(9)所定义的最优控制问题化为标准形式, 可令

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_{n+1}(k) \\ \vdots \\ x_{n+l}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-l) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

从而式(5)变为

$$\bar{x}(k+1) = \bar{F}\bar{x}(k) + \bar{G}u(k), \quad (16)$$

其中

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F & G & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & I & \\ 0 & 0 & \dots & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (17)$$

同样式(9)可以化为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\bar{x}^T(k) \hat{Q}_1 \bar{x}(k) + u^T(k) \hat{Q}_2 u(k)], \quad (18)$$

其中

$$\hat{Q}_1 = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} & 0 \\ Q_{12}^T & Q_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_2 = Q_2^2. \quad (19)$$

式(16)和(18)化为了标准的离散系统最优控制问题, 从而可以求得这时的最优控制为

$$u(k) = -\bar{L}\bar{x}(k) = -L_1 x(k) - L_2 u(k-l) - \dots - L_{l+1} u(k-1), \quad (20)$$

其中 L_1, \dots, L_{l+1} 是 \bar{L} 的相应维数的分块矩阵。可见这时的最优控制除直接的线性状态反馈外, 还包括前 l 拍控制量的线性组合。

四、延迟时间是采样周期的非整数倍的情况 ($\bar{m} \neq 0$)

当 $\bar{m} \neq 0$ 时, 式(1)可以离散化〔1〕为

$$x(k+1) = Fx(k) + G_a u(k-l) + G_b u(k-l+1), \quad (21)$$

其中 $F = e^{AT}$, $G_a = \int_{\bar{m}}^T e^{A\tau} d\tau B$, $G_b = \int_0^{\bar{m}} e^{A\tau} d\tau B$.

通过增广状态的方法, 式(21)可进一步化为如式(16)所示的标准离散状态方程, 如下所示:

当 $l=1$ 时有

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_{n+1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} F & G_a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} G_b \\ I \end{bmatrix}. \quad (22)$$

当 $l>1$ 时有

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_{n+1}(k) \\ \vdots \\ x_{n+l}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-l) \\ \vdots \\ u(k-l) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F & G_a & G_b & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots \cdots \cdots & I \\ 0 & 0 & \cdots \cdots \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (24)$$

下面进一步将式(2)所示的连续的性能指标函数离散化. 根据式(1)和(3), 当 $kT \leq t < (k+1)T$ 时可以解得

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-kT)} x(k) + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau-l) d\tau \\ &= e^{A(t-kT)} x(k) + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau-lT + \bar{m}) d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

当 $kT \leq t < (k+1)T - \bar{m}$ 时, 上式可化为(参见图1)

$$x(t) = e^{A(t-kT)} x(k) + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)} d\tau B u(k-l). \quad (26)$$

当 $(k+1)T - \bar{m} \leq t < kT + T$ 时, 式(25)可化为(参见图1)

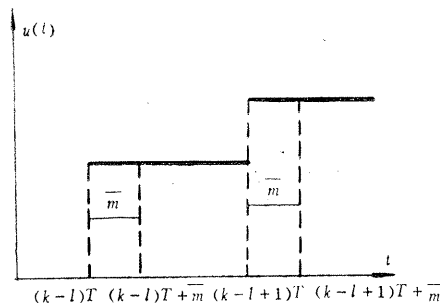


图 1 包含延时的 $u(t)$ 简图

$$\begin{aligned}
 x(t) = & e^{A(t-kT)}x(k) + \int_{kT}^{(k+1)T-\bar{m}} e^{A(t-\tau)}d\tau Bu(k-l) \\
 & + \int_{kT+\bar{m}}^t e^{A(t-\tau)}d\tau Bu(k-l+1).
 \end{aligned} \quad (27)$$

将式(26)和(27)代入式(7)可得

$$\begin{aligned}
 J_k = & \int_{kT}^{(k+1)T-\bar{m}} [x^T(t) \bar{Q}_1 x(t) + u^T(t) \bar{Q}_2 u(t)] dt. \\
 & + \int_{(k+1)T-\bar{m}}^{(k+1)T} [x^T(t) \bar{Q}_1 x(t) + u^T(t) \bar{Q}_2 u(t)] dt \\
 = & [x^T(k) Q_{11}^1 x(k) + 2x^T(k) Q_{12}^1 u(k-l) + u^T(k-l) Q_{22}^1 u(k-l) \\
 & + u^T(k) Q_{22}^1 u(k)] + [x^T(k) Q_{11}^2 x(k) + 2x^T(k) Q_{12}^2 u(k-l) \\
 & + 2x^T(k) Q_{13}^2 u(k-l+1) + u^T(k-l) Q_{22}^2 u(k-l) \\
 & + u^T(k-l+1) Q_{33}^2 u(k-l+1) + 2u^T(k-l) Q_{23}^2 u(k-l+1) + u^T(k) Q_{22}^2 u(k)],
 \end{aligned} \quad (28)$$

其中各参数可以求得为

$$\begin{cases} Q_{11}^1 = Q_1(T-\bar{m}), & Q_{12}^1 = Q_{12}(T-\bar{m}), \\ Q_{22}^1 = Q_2^*(T-\bar{m}), & Q_2^1 = (T-\bar{m})\bar{Q}_2. \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} Q_{11}^2 = F^T(T-\bar{m})Q_1(\bar{m})F(T-\bar{m}), & Q_{12}^2 = F^T(T-\bar{m})Q_1(\bar{m})G(T-\bar{m}), \\ Q_{13}^2 = F^T(T-\bar{m})Q_{12}(\bar{m}), & Q_{22}^2 = G^T(T-\bar{m})Q_1(\bar{m})G(T-\bar{m}), \\ Q_{23}^2 = G^T(T-\bar{m})Q_{12}(\bar{m}), & Q_{33}^2 = Q_2^*(\bar{m}), \\ Q_{33}^3 = Q_2^*(\bar{m}), & Q_2^2 = \bar{m}\bar{Q}_2. \end{cases} \quad (30)$$

上两式中各符号的意义如下:

$$\begin{cases} F(t) = e^{At}, & G(t) = \int_0^t e^{A\tau}d\tau B, \\ Q_1(t) = \int_0^t F^T(\tau)\bar{Q}_1F(\tau)d\tau, \\ Q_{12}(t) = \int_0^t F^T(\tau)\bar{Q}_1G(\tau)d\tau, \\ Q_2^*(t) = \int_0^t G^T(\tau)\bar{Q}_1G(\tau)d\tau. \end{cases} \quad (31)$$

这里 F , G , Q_1 , Q_{12} 与 Q_2 可以采用 [2] 中算法进行计算, 因此式 (28) 中的各参数矩阵均可利用现成的算法计算出来。

利用式 (23) 所示的增广状态, 式 (2) 可进一步表示为

$$J_k = \bar{x}^T(k) \hat{Q}_1 \bar{x}(k) + 2 \bar{x}^T(k) \hat{Q}_{12} u(k) + u^T(k) \hat{Q}_2 u(k), \quad (32)$$

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\bar{x}^T(k) \hat{Q}_1 \bar{x}(k) + 2 \bar{x}^T(k) \hat{Q}_{12} u(k) + u^T(k) \hat{Q}_2 u(k)], \quad (33)$$

其中, 当 $l=1$ 时有

$$\hat{Q}_1 = \begin{bmatrix} Q_{11}^1 + Q_{11}^2 & Q_{12}^1 + Q_{12}^2 \\ (Q_{12}^1 + Q_{12}^2)^T & Q_{22}^1 + Q_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_{12} = \begin{bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_2 = \bar{Q}_2 T + Q_{33}. \quad (34)$$

当 $l > 1$ 时有

$$\hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} Q_{11}^1 + Q_{11}^2 & Q_{12}^1 + Q_{12}^2 & Q_{13} & 0 \\ (Q_{12}^1 + Q_{12}^2)^T & Q_{22}^1 + Q_{22}^2 & Q_{23} & 0 \\ Q_{13}^T & Q_{23}^T & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_{12} = 0, \quad \hat{Q}_2 = \bar{Q}_2 T. \quad (35)$$

至此, 原来的最优控制问题化为了如式 (16) 及 (33) 所示的标准的离散系统最优控制的问题, 从而利用已有的算法可以求得最优控制也如式 (20) 所示。可以看出, 该最优控制除了通常的直接线性状态反馈外, 同时包括前 l 拍控制量的线性组合。

五、最优控制存在性讨论

对于式 (16) 及 (33) 所定义的最优控制问题, 当 $[\bar{F}, \bar{G}]$ 完全能控时, 则最优控制一定存在。这里 \bar{F} 和 \bar{G} 如式 (24) 所示, 其中 \bar{F} 是 $(n+lm) \times (n+lm)$ 维矩阵, \bar{G} 是 $(n+lm) \times m$ 维矩阵。由于 \bar{F} 和 \bar{G} 的维数较高, 下面设法找到判定 $[\bar{F}, \bar{G}]$ 能控的简化条件。

根据式 (24) 有

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \bar{F} \bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{F}^{l-2} \bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}^{l-1} \bar{G} = \begin{bmatrix} G_b \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \overline{F}^l \overline{G} &= \begin{pmatrix} FG_b + G_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{F}^{l+1} \overline{G} = \begin{pmatrix} F(FG_b + G_a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \overline{F}^{n+l-1} \overline{G} \\ &= \begin{pmatrix} F^{n-1}(FG_b + G_a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (37)$$

上式中令 $G^* = FG_b + G_a$, 则 $[\overline{F}, \overline{G}]$ 的能控性矩阵可写为

$$\begin{aligned} W &= [\overline{G} \quad \overline{F} \overline{G} \dots \overline{F}^{n+l-1} \overline{G}] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & G_b & G^* & FG^* \dots F^{n-1} G^* & \dots & F^{n+l(m-1)-1} G^* \\ \vdots & \vdots & & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & I & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & I & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (38)$$

由上式可以看出, W 满秩的充分必要条件是如下的矩阵

$$W^* = [G^* \quad FG^* \dots F^{n-1} G^*] \quad (39)$$

满秩。也就是说, 只要 $[F, G^*]$ 完全能控, 前面定义的最优控制一定存在。这里 F 是 $n \times n$ 矩阵, $G^* = FG_b + G_a$ 是 $n \times m$ 矩阵。因此可以将维数较高的 $[\overline{F}, \overline{G}]$ 的能控性判断化为维数较低的 $[F, G^*]$ 的能控性判断。

六、计算举例

已知系统的方程及性能指标为

$$\dot{x} = -x + u(t-\lambda), \quad X(0) = 20, \quad (40)$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + 0.1u^2) dt, \quad (41)$$

要求计算离散的最优控制, 设采样周期 $T = 0.1$ 。

(1) 设延迟时间 $\lambda = 0.4$, 这是延迟时间是采样周期整数倍的情况。利用前面给出的算法及运行相应的程序求得最优控制为

$$u(k) = -L_1 x(k) - L_2 u(k-4) - L_3 u(k-3) - L_4 u(k-2) - L_5 u(k-1), \quad (42)$$

其中

$$\begin{cases} L_1 = 1.325041, & L_2 = 0.1393557, & L_3 = 0.1540118, \\ L_4 = 0.1702095, & L_5 = 0.1881105, \end{cases} \quad (43)$$

求得最小的性能指标函数为 $J = 151.9041$ 。

(2) $\lambda = 0.25$ 。这是延迟时间是采样周期的非整数倍的情况。利用前面给出的算法及运行相应的程序求得最优控制为

$$u(k) = -L_1 x(k) - L_2 u(k-3) - L_3 u(k-2) - L_4 u(k-1), \quad (44)$$

其中

$$\begin{cases} L_1 = 1.539477, & L_2 = 0.07893062, \\ L_3 = 0.1702094, & L_4 = 0.1881104, \end{cases} \quad (45)$$

求得最小的性能指标函数为 $J = 135.0772$ 。可见这第二种情况 $\lambda = 0.25$ 要比第一种情况 $\lambda = 0.4$ 的性能好。图 2 表示了这两种情况的动态响应，同时图中也画出了当不加任何控制时的响应。从图中看出，当采用最优控制后，系统具有满意的动态响应性能。

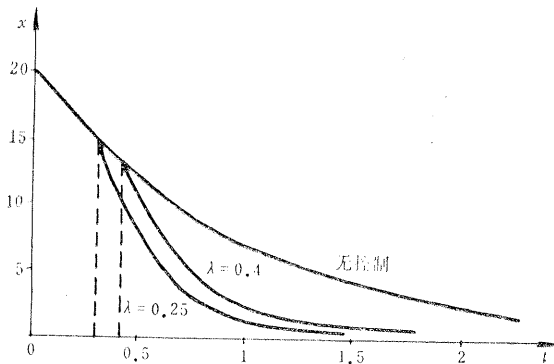


图 2 举例系统的动态响应($T = 0.1$)

参 考 文 献

- [1] Franklin, G. F. and Powell, J. D., Digital Control of Dynamic Systems, ADDISON-WESLEY, MASSACHUSETTS, (1980).
- [2] 孙增圻, 采样控制系统中线性二次型最优控制器的设计, 自动化学报, 9, 3, (1983), 191—198.

THE LINEAR QUADRATIC OPTIMAL CONTROL
FOR SAMPLED-DATA SYSTEMS WITH
DELAY IN CONTROL

Li Wei

(Beijing Institute of
Information & Control)

Sun Zengqi

(Tsinghua University,
Beijing)

Abstract

A sampled-data system, in which the process is time-continuous with delay in control and the controller is time-discrete, is considered. A set of formulas and algorithms is presented for computations of the time-discrete controller which minimizes a time-continuous quadratic performance. The sampled period in the system is not limited to a submultiple of the delay time. The sufficient condition for the existence of the optimal control is derived. An example is given to illustrate the application of the algorithms.