第4卷 第3期　　控制理论与应用　　Vol.4, No.3
1987年9月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Sept., 1987

线性多变量控制系统的H^∞设计方法

顾大伟

（英国牛津大学）

摘　　要

八十年代以来，国外出现了线性多变量控制系统的H^∞设计方法。它以稳定的传递函数矩阵的线性空间即H^∞空间的某种范数作为系统的性能指标。设计目标是在可能发生的最坏干扰下使系统的误差在这种范数的意义下为最小。这样控制系统的设计就归结为一个"极小极大"问题。H^∞设计方法近年来发展迅速，受到很多人应有的注意。有人把它说成是控制理论的"一场静悄悄的革命"。但是迄今为止H^∞方法还是一种正在发展的方法，因此也有许多科学家目前对它还持观望态度。

近年来，国外出现了线性多变量控制系统的一种新的设计方法，即H^∞方法，颇引人注目。本文想向国内同行简单介绍一下这种设计方法的由来和大致思想。

一、线性控制系统的鲁棒性（robustness）设计的回顾

在实际控制系统的设计中，最棘手的是如何对付系统的不确定性（uncertainty）。不确定性可能来自描述对象动力学特性的数学模型的不精确（事实上，绝大多数情况下难以找到确切的数学模型），也可能来自外界干扰的多样性。

反馈控制是处理不确定性的有力手段。自本世纪三十年代以来，控制工程界不断通过理论和实践来研究反馈控制，企图找出理想的设计方法来保证系统有能力承受不确定性。这方面的进展大致可以分为以下几个阶段。

（一）三十年代的Nyquist稳定性判别准则　这个准则揭示，一个反馈控制系统稳定的充分必要条件是：它的开环传递函数的Nyquist轨迹逆时针绕复平面上（－1，0）点的次数恰等于它的开环系统的右半平面极点数。据此，控制系统的一条设计原则就是：在使Nyquist轨迹与（－1，0）点保持足够距离的前提下，增大系统在某个起关键作用的频率段内的增益量。这样既满足了系统性能方面的设计要求，又保证了系统承受不确定因素的性能。这个为广大控制工程界所熟知的经典设计方法虽然有其不足之处（例如不能直接适用于多输入多输出系统），但至今仍是应用最广泛的设计途径。

（二）四十年代的Wiener最优滤波理论　这方面的工作起源于时间域中的一个实际设计问题，即在有外界噪声干扰的情况下如何设计误差最小的目标跟踪雷达系统的问题。Wiener用某些随机过程的数学模型来代表外界干扰信号，并把控制系统的设计转

本文于1986年8月5日收到。1987年1月21日收到修改稿。

化成数学上的某种优化问题。尽管当时限于某些条件（如没有计算机），Wiener 方法未得广泛应用，但它奠定了最优控制研究的基石，并导致了由“经典控制”转向“现代控制”[1]的历史转变。经过 Kalman 等人的工作，随着状态空间理论的成熟，到六十年代，终于出现了以 Wiener 的思想为基础的 LQG 反馈控制系统优化设计方法。LQG 方法能应用于多输入多输出的控制系统。在外界干扰信号能表示成白噪声模型或白噪声经过滤波后的噪声模型时，LQG 是一种很理想的设计方法。在很多实际控制工程中，特别在航空控制问题中，LQG 方法确实是相当成功的。然而未遂人意的是，实际干扰信号并不都能用白噪声或过滤后白噪声的模型来表示。而且，LQG 方法考虑的是系统的精确数学模型。因此，对于系统数学模型的不确定性，LQG 方法的设计很可能不具备鲁棒性。这是它比经典控制的 Nyquist 方法大为逊色的地方。这就引起了人们对于经典控制方法的进一步研究与发掘。

（三）六十年代至七十年代的多输入多输出系统频率域设计方法　从六十年代后期到七十年代，许多学者（其中绝大多数是英国学者）试图把 Nyquist 方法和 Bode 方法等经典控制方法推广于多输入多输出控制系统的设计。其中较为成功的或许是 Rosenbrock 的逆 Nyquist 阵列（inverse Nyquist array）法，MacFarlane 的特征轨迹（characteristic locus)法和 Mayne 的回差矩阵（return difference matrix）法。此外，以色列的 Horowitz 也在多输入多输出系统的设计中发展了 Nyquist 型图（graphical Nyquist-type）法。这些方法至今仍有发展，在工业中成功应用的报告（主要在英国）也常见诸文献。但是，它们也不能很好地处理控制对象数学模型不确定的问题。

（四）八十年代的H^∞设计理论　这是鲁棒性设计的重要发展。这方面的工作是由加拿大的 Zames 等人所开始的。

Zames 把 LQG 方法设计的系统缺乏鲁棒性一事归咎于在设计的优化问题中采用积分指标评价性能。他还认为用白噪声模型表示不确定的干扰是不现实的。Zames 考虑了这样一个单输入单输出系统的设计问题：设计一个反馈控制器，使闭环系统稳定，且外干扰对系统输出的影响最小。他假定外干扰信号属于某一已知信号集，而所谓“影响最小”是指在该信号集的最坏干扰情况下系统输出的能量最小。

要解决这样的设计问题，就须在能使闭环系统稳定的所有控制器中选出一个控制器，使与之相应的敏感性函数（sensitivity function）的H^∞范数达到最小。敏感性函数是指从外干扰信号到系统输出的传递函数。由于H^∞范数是一种极大值，所以这个设计问题就归结为一个“极小极大”问题。

几年来，这个“极小极大”设计方法已被推广于多输入多输出系统的设计，并且发展到用以处理比敏感性函数极小化问题更为一般的控制问题。它的发展速度是引人注目的。下面我们介绍这种设计理论的大致思想和方法。

1）虽然许多人对这个名称颇有异议，我们暂且还是用这个词表示基于状态空间模型的控制理论。

二、H^{∞}设计理论

粗略地说，在控制问题中，H^{∞}空间就是指稳定的传递函数矩阵的空间。设$F(s)$是一个稳定的传递函数。如果$F(s)$是标量（scalar），则它的H^{∞}范数是指：遍历所有ω，复平面上频率响应$F(j\omega)$的最大模值；如果$F(s)$是矩阵，则它的H^{∞}范数是指：遍历所有ω，$F(j\omega)$的所有奇异值中的最大值。$F(s)$的H^{∞}范数可表示为$\|F\|_{\infty}$。

我们先看一个单输入单输出系统的例子。假定系统受到不确定的外干扰信号的作用。设已知外干扰属于某个狭频带（narrow band）的信号集。属于这个信号集的信号其谱密度都落在某一已知的公共频率区间内。设计系统的要求是使输出保持在某一固定值附近。设$F(s)$是从外干扰到输出误差（即实际输出与该固定值之差）的传递函数，$W(s)$是某一权函数。$W(s)$在那个公共频率区间内取大值，而在区间外则取小值。于是，极小化$\|WF\|_{\infty}$就意味着在可能发生的最坏干扰下使输出误差的能量的均方根值达到最小。可见，在这个调节器设计问题中，H^{∞}范数是系统鲁棒性的一种很理想的衡量标准。

再看一个系统模型有不确定性的例子。考虑图1的反馈系统。$K(s)$表示控制器传递函数。$G(s)+\Delta G(s)$表示控制对象的实际传递函数，其中$G(s)$是名义的（nominal）模型，$\Delta G(s)$是模型的未知摄动。它可能来自模型参数的摄动，或对象动态的某种未知的变化，或二者兼有。假定在$\Delta G(s)$为零的情况下系统是稳定的。又为简单起见假定$\Delta G(s)$本身是稳定的。且其在虚轴上的最大奇异值从上方受限于一个标量函数$b(j\omega)$。那么，在有模型摄动的情况下，系统稳定的一个充分条件是

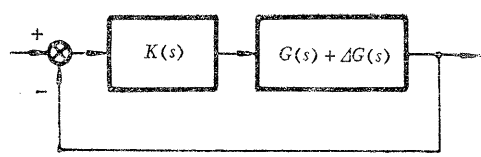

图 1

$$\|bK(I+GK)^{-1}\|_{\infty}<1.$$

也就是说，加权闭环传递函数的H^{∞}范数小于某一数值就足以保证系统稳定性的鲁棒性。

以上两个例子都用H^{∞}范数来刻划不确定因素所可能产生的最坏后果，并且把极小化某个函数的H^{∞}范数作为设计系统的准则。用这种准则设计的反馈系统在某种意义上就在系统性能方面或稳定性方面达到了最好的鲁棒性。

几年来，已经有几类系统的设计问题被归纳成H^{∞}反馈设计模型，并且至少在理论上得到了解决。这些H^{∞}反馈设计都具有同一模式，即寻找一个控制器传递函数$K(s)$，它不但能稳定对象传递函数$G(s)$，而且能使$T(s)$的H^{∞}范数达到最小。这里，$T(s)$是传递函数$K(s)$及传递函数$G(s)$的非线性函数。它可能是加权闭环传递函数，也可能是加权传递函数的加权组合或其他形式的函数，因情况而异。总之，$T(s)$须能体现系统的设计要求。

这个有约束的极小极大优化问题可以分为几步解决。首先，把能使闭环系统达到稳

定的控制器传递函数$K(s)$参数化。通常采用Youla方法。把$K(s)$表示成某个$Q(s)$的函数。$Q(s)$可以是任一个合适维数的稳定的传递函数。这样，优化问题就可以在全H^∞空间上进行。经过这个代换，$T(s)$常常转化为$Q(s)$的一个线性函数。然后再利用H^∞空间的性质及保范运算，把这个优化问题转化成一个模型的匹配问题或插值问题。最简单的匹配问题是：给定一个H^∞函数$F(s)$，在完全不稳定空间（即极点全在右半复平面的传递函数空间）中寻找一个$R(s)$，使得当ω遍历全数轴时，$F(j\omega)-R(j\omega)$的所有奇异值中的最大值达到最小。这种匹配问题已能得到圆满解决了。对于更复杂的（也是更一般的）匹配问题，则须借助于迭代方法，以得到符合精度要求的近似解。插值问题的形式仅适用于某些特殊的问题。最后，在求得了最优解$Q(s)$后，再逆溯而得到$K(s)$。所有这些计算，都可以用状态空间模型通过一般的常量矩阵计算方法进行，从而都是可以实现的。

三、H^∞设计方法的近况和评价

近几年中，H^∞设计方法的发展十分迅速，令人注目。誉者认为迄今为止这是可以保证反馈系统达到实际鲁棒性能的唯一令人满意的设计方法，褒之为“控制系统领域内的一场静悄悄的革命”．这方面的专题学术会议也相继召开。1984年10月，美国海军科研系统及Honeywell公司举办研讨会。1986年3月由英国的IMC主持在英国牛津召开研讨会。1986年底在荷兰召开专题会议。

但是，许多控制理论工作者对H^∞方法目前还持观望态度。在控制工程界还有许多人对它很不了解。其主要原因是它尚未有在工业控制课题中成功应用的实例。在理论上，它也还有不足之处。例如，加权函数的选择还没有系统化的方法；在计算过程中，数学模型的阶数会升高，从而须作模型降阶的工作，而这对最终设计结果的影响如何还未见有研究。更要紧的是，现实的控制工程设计往往要提出两个或更多的具有H^∞范数形式的目标函数。如何解决这种多目标的优化问题尚待探讨。所有这些都影响了H^∞设计方法的发展及其在工业中的应用。至于把H^∞设计方法推广到时变系统，非线性系统及分布参数系统等，就更有待于研究了。目前H^∞设计方法方面的研究人员也正致力于解决这些问题。

在H^∞设计方法的研究中较为活跃的人物，除了前面提到的G.Zames外，还有加拿大的B. Francis, M. Vidyasagar, 美国的J. Doyle, M. Safonov, J. Pearson, 英国的I. Postlethwaite, K. Glover及荷兰的H. Kwakernaak等人。对此有兴趣的读者可以参阅文末所列的一些主要文献。M. Vidyasagar新近出版的一本书《Control System Synthesis: A Factorization Approach》较为全面地介绍了H^∞设计方法。

值得一提的是，最近在英国牛津大学建造了一个H^∞设计方法的计算机软件系统。它正被应用于航空工业中的一些实际控制工程。或许，在不远的将来，我们可以看到H^∞设计方法的更令人鼓舞的发展及令人信服的应用。

参 考 文 献

〔1〕 Zames, G., Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses, IEEE Trans., AC-**26**, (1981), 301-320.

〔2〕 Zames, G., B. A. Francis, Feedback, minimax sensitivity and optimal robustness, IEEE Trans., AC-**28**, (1983), 585-601.

〔3〕 Safonov, M. G., M. S. Verma, L^∞ sensitivity optimization and Hankel approximation, IEEE Trans. AC-**30**, (1985), 279-280.

〔4〕 Vidyasagar, M., Control System Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press, Cambridge MA, (1985).

〔5〕 Francis B. A., J. W. Helton, G. Zames, H^∞-optimal feedback controllers for linear multivariable systems, IEEE Trans., AC-**29**, (1984), 888-900.

〔6〕 Francis B. A., G. Zames, Design of H^∞-optimal multivariable feedback systems, Proc. CDC, (1983).

〔7〕 Doyle, J. C., Lecture Notes on Advances in Multivariable Control, ONR/Honeywell Workshop, Minneapolis MN, (1984).

〔8〕 Doyle, J. C., Structured uncertainty in control systems, IFAC Workshop on Model Error Concepts and Compensation, Boston MA, (1985).

〔9〕 Chu, C. C., J. C. Doyle, The general distance problem in H^∞ synthesis, Proc. CDC, (1985).

〔10〕 Postlethwaite, I., Y. K. Foo, All solutions, all-pass form solutions and the "best" solutions to an H^∞ optimization problem in robust control, Proc. Sym. MTNS, Stockholm, (1985).

〔11〕 Glover, K., All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞-error bounds, Int. J. Control, **39**, (1984), 1115-1193.

〔12〕 Kwakernaak, H., Minimax frequency domain performance and robustness optimization of linear feedback systems, IEEE Trans., AC-**30**, (1985), 994-1004.

THE H^∞ APPROACH TO THE DESIGN OF LINEAR MULTIVARIABLE CONTROL SYSTEMS

Gu Dawei
(University of Oxford, UK)

Abstract

The H^∞ approach to the design of linear multivariable control systems appears internationally since the 1980′s. To assess the system performance, it uses the H^∞ norm, that is, certain norm in the linear space of stable transfer-function matrices. The design target is to minimize the system error in the sense of this norm under the worst possible disturbances. The control system design problem thus boils down to a "mini-max" problem. The H^∞ design approach develops rapidly in recent years and has attracted deserved attention from many people. Some describe it as "a quiet revolution" in control theory. But so far the H^∞ approach is a developing method, many scientists still take a wait-and-see attitude.