第4卷 第3期
1987年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 4, No. 3
Sept., 1987

线性多时滞差分微分系统全时滞稳定的代数判据

胡跃明

（安徽经济管理学院，合肥）

摘　要

考虑下列线性多时滞差分微分系统

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+\sum_{k=1}^{N}A_kx(t-\tau_k\cdot r),\tag{$*$}$$

其中 $x\in R^n$，A_k（$k=0$，1，…，N）是 $n\times n$ 常数矩阵；$\tau_k=(\tau_{k1},\tau_{k2},\cdots,\tau_{kM})$，$\tau_{kj}$（$k=1$，…，$N$；$j=1$，…，$M$）是整数，$r^T=(r_1,r_2,\cdots,r_M)$，$\tau_k\cdot r=\sum_{j=1}^{M}\tau_{kj}\cdot r_j$。本文利用 Liapunov 函数和 Liapunov 泛函，给出了系统（$*$）全时滞稳定的代数判别准则，并具体讨论了 $n=3$，$N=1$ 时，系统（$*$）全时滞稳定的代数条件，克服了Hale文中验证“超越”条件的困难，为实际工作者提供了十分有效而方便的判别方法。

在实际问题中，常常要遇到多个时滞相互依赖的线性差分微分系统

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+\sum_{k=1}^{N}A_kx(t-\tau_k\cdot r),\tag{1}$$

其中 $x\in R^n$，$A_k(k=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$是 $n\times n$ 常数矩阵；$\tau_k=(\tau_{k1},\tau_{k2},\cdots,\tau_{kM})$；$\tau_{kj}\geqslant 0$ 是整数，$\tau_k\neq 0$，$r^T=(r_1,r_2,\cdots,r_M)$，$\tau_k\cdot r=\sum_{j=1}^{M}\tau_{kj}\cdot r_j$；$k=1,2,\cdots,N$；$j=1,2,\cdots,M$，$R^+=[0,+\infty)$。

J. K. Hale 1982年在华讲学期间，曾给出了系统（1）为全时滞稳定的充分必要条件。但是他所给的条件是“超越”的，理论上虽很完善，实际上却难以验证。因此给出系统（1）为全时滞稳定的若干比较容易验证的充分条件是很有必要的，为此已有过很多研究工作，（参阅[5]、[6]、[7]），但这些工作只是对系统（1）中 $N=1$，$M=1$ 的特殊情形而言，对于具有多个时滞的系统（1）的全时滞稳定性，至今还没有比较便于利用的代数判别准则。本文利用 Liapunov 直接方法，得到了若干代数判据；对于 $n=3$ 的情形，给出了比较详细的结果；最后还给出具体例子说明这些判据的效用。

（1）之特征方程为

本文于1985年11月11日收到。1986年3月7日收到修改稿。

$$f(\lambda,r,A) \triangleq \mathrm{Det}\left(\lambda I-\sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\lambda\tau_k\cdot r}\right)=0, \tag{2}$$

这里 $A=(A_0,A_1,\cdots,A_N)$，I 为 $n\times n$ 单位矩阵.如果 $f(\lambda,r,A)=0$ 隐含 $\mathrm{Re}\lambda<0$，则称系统(1)在(r,A)处是一致渐近稳定的；若对于任意的 $r\in(R^+)^M$，系统 (1) 在(r,A)处是一致渐近稳定的，则称系统（1）是全时滞稳定的，此时简记为 $A\in S$.

引理 1　设 A_0 是稳定矩阵，则必存在正定的对称阵 C 使得

$$A_0^T C+CA_0=-D, \tag{3}$$

这里 A_0^T 表示 A_0 的转置；D 是任一事先给定的正定对称阵；A_0 是稳定矩阵，意即 A_0 的所有特征根均具有负实部.

定理 1　设 A_0 是稳定矩阵，且存在 $n\times n$ 正定对称阵 E_1，E_2，…，E_N 及（3）中的 D 使得

$$P=\begin{pmatrix} D-\sum_{k=1}^{N}E_k & -CA_1 & -CA_2 & \cdots & -CA_{N-1} & -CA_N \\ -A_1^T C & E_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A_2^T C & 0 & E_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_{N-1}^T C & 0 & 0 & \cdots & E_{N-1} & 0 \\ -A_N^T C & 0 & 0 & \cdots & 0 & E_N \end{pmatrix} \tag{4}$$

是正定阵，则 $A\in S$.

证　考虑 Liapunov 泛函

$$V(\varphi)=\varphi^T(0)\ C\varphi(0)+\sum_{k=1}^{N}\int_{-\tau_k\cdot r}^{0}\varphi^T(\theta)E_k\varphi(\theta)d\theta, \tag{5}$$

这里 C 是满足（3）的正定阵，则有

$$\begin{aligned}\dot V_{(1)}(\varphi) &= \left(A_0\varphi(0)+\sum_{k=1}^{N}A_k\varphi(-\tau_k\cdot r)\right)^T C\varphi(0) \\ &+\varphi^T(0)C\left(A_0\varphi(0)+\sum_{k=1}^{N}A_k\varphi(-\tau_k\cdot r)\right) \\ &+\sum_{k=1}^{N}[\varphi^T(0)E_k\varphi(0)-\varphi^T(-\tau_k\cdot r)E_k\varphi(-\tau_k\cdot r)]\end{aligned}$$

$$=\varphi^T(0)(A_0^T C+CA_0)\varphi(0)+2\sum_{k=1}^{N}\varphi^T(0)CA_k\varphi(-\tau_k\cdot r)$$

$$+\sum_{k=1}^{N}[\varphi^T(0)E_k\varphi(0)-\varphi^T(-\tau_k\cdot r)E_k\varphi(-\tau_k\cdot r)]$$

$$=-\varphi^T(0)D\varphi(0)+2\sum_{k=1}^{N}\varphi^T(0)CA_k\varphi(-\tau_k\cdot r)$$

$$+\sum_{k=1}^{N}[\varphi^T(0)E_k\varphi(0)-\varphi^T(-\tau_k\cdot r)E_k\varphi(-\tau_k\cdot r)]$$

$$=-(\varphi^T(0),\varphi^T(-\tau_1\cdot r),\cdots,\varphi^T(-\tau_N\cdot r))\cdot$$

$$\begin{pmatrix} D-\sum_{k=1}^{N}E_k & -CA_1 & -CA_2 & \cdots & -CA_N \\ -A_1^T C & E_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -A_2^T C & 0 & E_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_N^T C & 0 & 0 & \cdots & E_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(0)\\ \varphi(-\tau_1\cdot r)\\ \vdots \\ \varphi(-\tau_N\cdot r)\end{pmatrix}$$

$$=-(\varphi^T(0),\varphi^T(-\tau_1\cdot r),\cdots,\varphi^T(-\tau_N\cdot r))P(\varphi^T(0),\varphi^T(-\tau_1\cdot r),\cdots,\varphi^T(-\tau_N\cdot r))^T.$$

于是当P是正定阵时，由[2]定理5.2.1知，对任意$r\in(R^+)^M$，系统(1)在(r,A)处是一致渐近稳定的，故$A\in S$。 证毕。

由定理1知，只要(4)中的矩阵P是正定的，则$A\in S$。众所周知，P是正定的充要条件是P的所有顺序主子式都大于零，因此定理1给出了系统(1)全时滞稳定的代数判据；而且E_k $(k=1,2,\cdots,N)$的选取也比较灵活，下面将给出具体的选取方法，得到系统(1)全时滞稳定的一些简单的代数判据。

推论 1 如果系统(1)中$n=1$且$A_0<0$，$N\sum_{k=1}^{N}A_k^2<A_0^2$，则$A=(A_0, A_1,\cdots,A_N)\in S$。

证 事实上，由于$n=1$，故可取$E_k=-\frac{1}{2N}A_0$，$k=1,2,\cdots,N,C=1/2,D=-A_0$，则(4)中所定义的矩阵$P$的第$i$阶顺序主子式$\Delta_i$为

$$\Delta_1=-\frac{1}{2}A_0>0,$$

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}A_0 & -\frac{1}{2}A_1 & \cdots & -\frac{1}{2}A_{i-1} \\ -\frac{1}{2}A_1 & -\frac{1}{2N}A_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{2}A_{i-1} & 0 & \cdots & -\frac{1}{2N}A_0 \end{vmatrix}\quad (i=2,\cdots,N+1)$$

$$=-\frac{1}{2N}A_0\Delta_{i-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{A_0}{2N}\right)^{i-2}A_{i-1}^2$$

$$=\left(-\frac{1}{2N}A_0\right)^2\Delta_{i-2}+\frac{A_0}{8N}\left(-\frac{A_0}{2N}\right)^{i-3}(A_{i-1}^2+A_{i-2}^2).$$

如此递推下去得

$$\Delta_i=\left(-\frac{A_0}{2N}\right)^{i-1}\Delta_1+\frac{1}{8N}A_0\left(-\frac{A_0}{2N}\right)^{i-3}(A_{i-1}^2+A_{i-2}^2+\cdots+A_1^2)$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2N}A_0\right)^{i-2}\left(\frac{1}{N}A_0^2-\sum_{k=1}^{i-1}A_k^2\right).$$

因此若 $N\sum\limits_{k=1}^{N}A_k^2<A_0^2$，则 $\Delta_i>0$，$i=1,2,\cdots,N+1$，从而 P 是正定矩阵，由定理 1 即知 $A=(A_0,A_1,\cdots,A_N)\in S$.　　证毕.

由文[1]知，当 $N=1$，$M=1$ 时，$A=(A_0,A_1)\in S$ 当且仅当 $A_0<0$，$|A_1|<|A_0|$；从而此时推论 1 中所给的条件也是充分且必要的. 更一般地有

推论 2　如果系统（1）中的矩阵 A_0 是负定的对称阵，且

$$Q=\begin{pmatrix} -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdots & -A_N \\ -A_1^T & -\frac{1}{N}A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_N^T & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{N}A_0 \end{pmatrix}$$

是正定阵，则 $A=(A_0,A_1,\cdots,A_N)\in S$.

证　事实上，在定理 1 中取 $C=I$，$D=-2A_0$，$E_k=-\frac{1}{N}A_0$，$k=1,2,\cdots,N$，即知推论成立。

当 $n=3$，$N=1$ 时，为书写方便，把系统（1）记为

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+A_1x(t-r), \tag{6}$$

这里$A_0=(a_{ij})_{3\times3}$，$A_1=(b_{ij})_{3\times3}$，$x=(x_1,x_2,x_3)^T$，

记

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & 0 & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{12} & 0 & a_{22} & a_{32} & 0 \\ 0 & a_{13} & a_{12} & a_{23} & a_{22}+a_{33} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$B_{11}=\begin{vmatrix} a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{23} & a_{11}+a_{33} & 0 & a_{21} & a_{31} \\ a_{12}-a_{22} & -a_{31} & a_{22} & a_{32} & 0 \\ a_{13} & a_{12} & a_{33} & a_{22}+a_{33} & a_{32} \\ -a_{22} & a_{13}-a_{31} & 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$B_{22}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{31} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & a_{21} & a_{31} \\ -a_{11} & a_{12}-a_{22} & -a_{31} & a_{32} & 0 \\ 0 & a_{13} & a_{12} & a_{22}+a_{33} & a_{32} \\ -a_{11} & -a_{22} & a_{13}-a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$B_{33}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & 0 & a_{21} \\ -a_{11} & a_{12}-a_{22} & -a_{31} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{13} & a_{12} & a_{33} & a_{22}+a_{33} \\ -a_{11} & -a_{22} & a_{13}-a_{31} & 0 & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$B_{12}=B_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{13} & a_{11}+a_{33} & 0 & a_{21} & a_{31} \\ -a_{11} & -a_{31} & a_{22} & a_{32} & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{33} & a_{22}+a_{33} & a_{32} \\ -a_{11} & a_{13}-a_{31} & 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$B_{13}=B_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{21} & a_{31} \\ -a_{11} & a_{12}-a_{22} & a_{22} & a_{32} & 0 \\ 0 & a_{13} & a_{33} & a_{22}+a_{33} & a_{32} \\ -a_{11} & -a_{22} & 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$B_{23}=B_{32}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{21} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & 0 & a_{31} \\ -a_{11} & a_{12}-a_{22} & -a_{31} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{13} & a_{12} & a_{33} & a_{32} \\ -a_{11} & -a_{22} & a_{13}-a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由[8]中的 Барбашин 公式知，若 A_0 稳定，则可取正定阵 $C=\Delta_0(B_{ij})_{3\times3}$，$D=2\Delta_0 I_3$（$I_3$ 表示 3×3 单位矩阵），使得

$$A_0^T C+CA_0=-D,$$

再取 $E_1=\Delta_0 I_3$，则由定理1知

$$P=\begin{pmatrix} D-E_1 & -CA_1 \\ -A_1^T C & E_1 \end{pmatrix}=\Delta_0\begin{pmatrix} I_3 & -(B_{ij})_{3\times3}A_1 \\ -A_1^T(B_{ij})_{3\times3} & I_3 \end{pmatrix}\triangleq\Delta_0 P_0. \tag{7}$$

推论 3　如果（6）中的 A_0 是稳定矩阵，且（7）中所定义的矩阵 P_0 是正定的，则 $A=(A_0,A_1)\in S_0$，其中 B_{ij}，Δ_0 是如上所定义的行列式值。

从推论 3 的推导过程及 Барбашин 公式可知，类似地可以把推论 3 的结果推广到一般的系统（1）。

定理 2　如果系统（1）中的系数矩阵 A_i（$i=0,1,\cdots,N$）满足：

$$\tilde{Q}=\begin{pmatrix} -A_0^T-A_0-I & -A_1 & -A_2 & \cdots & -A_{N-1} & -A_N \\ -A_1^T & \frac{1}{N}I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A_2^T & 0 & \frac{1}{N}I & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_N^T & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N}I \end{pmatrix}$$

是正定的，则 $A=(A_0,A_1,\cdots,A_N)\in S$。

证　考虑 Liapunov 泛函

$$V(\varphi)=\varphi^T(0)\varphi(0)+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\tau_k\cdot r}^{0}\varphi^T(\theta)\varphi(\theta)d\theta,$$

则有

$$\dot{V}_{(1)}(\varphi)=\varphi^T(0)(A_0^T+A_0)\varphi(0)+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\varphi^T(0)\varphi(0)-\varphi^T(-\tau_k\cdot r)\cdot\varphi(-\tau_k\cdot r)]$$

$$=-(\varphi^T(0),\varphi^T(-\tau_1\cdot r),\cdots,\varphi^T(-\tau_N\cdot r))\tilde{Q}(\varphi^T(0),\ \varphi^T(-\tau_1\cdot r),\cdots,\varphi^T(-\tau_N\cdot r))^T.$$

由于$\widetilde{Q}$是正定阵，故由 Liapunov 稳定性定理即知$A=(A_0,A_1,\cdots,A_N)\in S$。

下面利用 Liapunov 函数，给出系统（1）全时滞稳定的另一代数判据。

定理 3 如果$\lambda_0=\min\{\mathrm{Re}\lambda:\det(\lambda I+A_0)=0\}>0$，且存在正常数$q>1$使得

$$q\sum_{k=1}^{N}|A_k|<\lambda_0,$$

则$A=(A_0,A_1,\cdots,A_N)\in S$。其中$|A_k|$表示矩阵$A_k$的欧氏模。

证　考虑 Liapunov 函数：$V(x)=x^Tx$，$x\in R^n$，则当$|\varphi(\theta)|<q|\varphi(0)|$，$\theta\in[-\max\limits_{1\le k\le N}\tau_k\cdot r,0]$时有

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(1)}(\varphi(0))&=2\varphi^T(0)A_0\varphi(0)+2\sum_{k=1}^{N}\varphi^T(0)A_k\varphi(-\tau_k\cdot r)\\&\le-2\lambda_0|\varphi(0)|^2+2\sum_{k=1}^{N}|\varphi^T(0)||A_k|q|\varphi(0)|\\&=-2(\lambda_0-q\sum_{k=1}^{N}|A_k|)|\varphi(0)|^2.\end{aligned}$$

由文[1]定理5.4.2即知系统(1)的零解是一致渐近稳定的，故$A=(A_0,A_1,\cdots A_N)\in S$。

文[6]讨论了对应于n阶常量方程的系统（1）的全时滞稳定性，但所用方法难以推广到一般的系统（1），因此利用本文中的方法对一般系统进行讨论研究是很有效的。

最后给出一个例子，利用文中结果证明它是全时滞稳定的。

考虑系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{y}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t-r_1)\\y(t-r_1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t-r_2)\\y(t-r_2)\end{pmatrix}\qquad(*)$$

取　$D=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$E_1=E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，则

$$P=\begin{pmatrix}6&0&-1&0&1&0\\0&6&1&1&1&-1\\-1&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&-1&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

经计算得：$\Delta_1=6$，$\Delta_2=36$，$\Delta_3=24$，$\Delta_4=19$，$\Delta_5=12$，$\Delta_6=8$。

故由定理1知，系统（$*$）是全时滞稳定的。

致谢　本文承蒙郑祖庥副教授的热情指导，在此深表谢意。

参 考 文 献

〔1〕 Hale, J. K., Theory of Functional Differential Equations, Springer-verlag, New York, (1977).

〔2〕 Huang, W. Z., Existence Conditions of a Special Type of Liapunov Functional for Two-dimensional Delay System. Chin. Ann of Math, 5B(4), (1984).

〔3〕 Bellman, R., Cooke, K. L., Differential-Difference Equations, Academic Press, (1963).

〔4〕 Hale, J. K., Infante, E. F., Tsen, F. P., Stability in Linear Delay Equations, Preprint, Brown University, (1981).

〔5〕 黄文璋，n阶常系数线性时滞微分方程无条件稳定的代数判据，安徽大学学报（自然科学版），1，(1983)，25—32.

〔6〕 廖晓昕，超越函数 $f_n(\lambda, e^{-\lambda\tau}) \overset{\text{def}}{=} \det(a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau}-\delta_{ij}\lambda)_{n\times n}$ 的零点全分布在复平面左半部的代数充分准则，科学通报，**27**，10，(1982)，577-580.

〔7〕 刘昌美，n阶中立型方程全时滞一致渐稳的充分的代数判定，科学通报，**30**，12，(1985)，956—957.

〔8〕 秦元勋、王慕秋、王联，运动稳定性理论与应用，科学出版社，(1981).

ALGEBRAIC CRITERIAS OF STABILITY FOR ALL DELAYS IN LINEAR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEM WITH MULTIPLE DELAYS

Hu Yueming

(Anhui Economic Management College, Hefei)

Abstract

In this paper, the author discusses the following linear differential-difference systems:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^{N} A_k x(t-\tau_k \cdot r) \tag{1}$$

Where $x \in R^n$, $A_k (k=0,1,\cdots,N)$ are constant matrices, $\tau_k = (\tau_{k1}, \tau_{k2}, \cdots, \tau_{kM})$, τ_{kj} $(k=1,\cdots,N, j=1,\cdots,M)$ are nonegative integers, $\tau_k \neq 0$, $r^T = (r_1, r_2, \cdots, r_M)$, $\tau_k \cdot r = \sum_{j=1}^{M} \tau_{kj} \cdot r_j$, some algebraic criterias of stability for all delays of system (1) are given by using liapunov's direct method. These results are very useful in real applications.