第4卷 第3期
1987年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.4, No.3
Sept., 1987

调宽采样控制系统的稳态稳定性*

周 鸿 兴

（山东大学，济南）

摘 要

本文讨论了带有调宽采样器的控制系统．文章以实际调宽采样控制系统的稳态输出是一个周期信号为依据，给出了这类控制系统稳态稳定性的精确定义，并严格证明了工业过程控制系统中大量应用的比例型以及比例积分型调宽采样控制系统具有稳态稳定性．

一、系统描述与稳态稳定性的定义

考虑图1所示调宽采样控制系统，其中$G_0(s)$表示被控对象，并假定它是所有极点都在左半平面上的有理分式，$G_1(s)$是工业调节器，$Y(s)$是系统的输出，$R(s)$与$F(s)$分别表示系统的参考输入与扰动．图中环节N是一个采样周期为T的调宽采样器（一般来说，$T>0$是由系统设计者确定的待定参数），其输出脉冲信号$u(t)$的保持时间与输入信号$v(t)$的采样值成正比．不失一般性我们假设

$$u(t)=\begin{cases}1 & nT\le t<(n+\alpha_n)T\\ 0 & (n+\alpha_n)T\le t<(n+1)T,\end{cases}\qquad n=0,1,\cdots \tag{1.1}$$

$$\alpha_n=\begin{cases}0 & v(nT)\le 0\\ v(nT) & 0\le v(nT)\le 1\\ 1 & v(nT)\ge 1\end{cases},\qquad n=0,1,\cdots \tag{1.2}$$

其中α_n称为调宽采样器在第n个采样周期的导通率，显然，$0\le\alpha_n\le 1$，$n=0,1,\cdots$．

由于调宽采样器是一个开关型非线性元件，又因为（1.1）、(1.2)是动态关系而不是稳态关系，因此不能用建立在Z变换基础上的离散控制系统理论以及描述函数法等一般的非线性控制系统的理论来研究调宽采样控制系统．正因如此，迄今还没有调宽采样控制系统的严格的理论．本文作者从实际的温度开关控制系统出发，在〔1〕中对调宽采样控制系统进行了稳态分析：

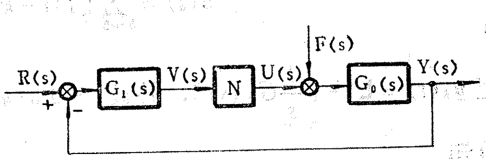

图1 系统方框图

定义1 在图1所示的调宽采样控制系统中，如果对$r(t)=r_0\cdot 1(t)$及$f(t)=$

*此项研究系中国科学院科学基金会资助项目．

本文于1985年12月1日收到，1986年7月日收到修改稿．

$f_0\cdot 1(t)$，存在某常数$\alpha\in(0,1)$，使得在周期性矩形波控制信号

$$u(t)=\begin{cases}1 & nT\le t<(n+\alpha)T\\ 0 & (n+\alpha)T\le t<(n+1)T\end{cases}\qquad n=0,1,\cdots \tag{1.3}$$

作用之下，系统具有周期性输出信号$y(t)$，则它称为该系统关于给定的$r(t)$和$f(t)$的稳态输出，产生稳态输出的控制(1.3)称为稳态控制。

文〔1〕证明了对相当广泛的一类$G_0(s)$、$G_1(s)$，调宽采样控制系统存在唯一的稳态输出，并且当$T\to 0$时，稳态输出的交流分量也趋于零。本文是〔1〕的继续，将讨论这类控制系统的稳定性问题，为此我们假设$f(t)\equiv 0$。

定义2 在图1所示调宽采样控制系统中，如果对给定的参考输入信号$r(t)=r_0\cdot 1(t)$，存在采样周期$T>0$以及固定的常数（稳态导通率）$\alpha\in(0,1)$，使得在任何初始条件之下都有

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha, \tag{1.4}$$

则称输出信号的稳态关于阶跃参考输入$r(t)$的稳态是稳定的，或简称该系统具有稳态稳定性。

二、比例型调宽采样控制系统

我们把$G_1(s)\equiv K=\text{const}$时图1所示的系统称为比例型调宽采样控制系统。在这样的控制系统中，若$r(t)=r_0\cdot 1(t)$，则调节器的输出信号为$v(t)=K[r_0-y(t)]$。

在调宽采样控制系统中，设$Y_c(s)=G_0(s)U(s)$，$y_c(t)=\mathbf{L}^{-1}[Y_c(s)]$，则系统的输出可写为$y(t)=y_e(t)+y_c(t)$，其中$y_e(t)$是系统在控制为零时相应于初始条件的自由运动。由于$G_0(s)$的所有极点都具有负实部，因此存在$M>0$以及与初值无关的$\lambda_0>0$，使得

$$|y_e(t)|\le Me^{-\lambda_0 t},\quad t\ge 0. \tag{2.1}$$

由于控制信号$u(t)$的形状为调宽矩形波(1.1)，因此

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}[1(t-kT)-1(t-(k+\alpha_k)T)], \tag{2.2}$$

记$y_\phi(t)=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G_0(s)\right]$，并设$t\le 0$时$y_\phi(t)=0$，则由(2.2)以及$Y_c(s)=G_0(s)U(s)$可知

$$y_c(t)=\sum_{k=0}^{\infty}[y_\phi(t-kT)-y_\phi(t-(k+\alpha_k)T)]. \tag{2.3}$$

若记系统受控对象的脉冲响应为$y_\delta(t)=\mathbf{L}^{-1}[G_0(s)]$，并设$t<0$时$y_\delta(t)=0$，则$y'_\phi(t)=y_\delta(t)$。于是由(2.3)可知

$$y_c(nT)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k T y_\delta((n-k)T-\alpha_{n,k}T), \tag{2.4}$$

其中 $\alpha_{n,k}\in[0,\alpha_k]$，$n=0,1,\cdots$，$k=0,1,\cdots,n-1$。

定理 1　在比例型调宽采样控制系统中，假设 $G_0(0)=1$，$0<r_0<1$。如果 $T>0$ 满足下列条件：

$$\sum_{l=1}^{\infty} Ty_\delta(lT-\sigma_l T)>r_0,\ \forall\sigma_l\in[0,1],\ l=1,2,\cdots, \tag{2.5}$$

则该系统关于阶跃参考输入 $r(t)=r_0\cdot 1(t)$ 具有稳态稳定性，并且(1.4)中的

$$\alpha=\frac{Kr_0}{1+K}.$$

证　由于 $v(t)=K[r_0-y(t)]$，因此由(2.4)可知

$$0=Kr_0-v(nT)-Ky_e(nT)-K\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k Ty_\delta((n-k)T-\alpha_{n,k}T),\qquad n=1,2,\cdots.$$

将上式取 n 从 0 到 ∞ 的和并交换最右端项的求和次序，则可得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}[Kr_0-v(nT)-Ky_e(nT)-K\alpha_n\sum_{l=1}^{\infty}Ty_\delta(lT-\alpha_{l+n,n}T)]=0. \tag{2.6}$$

由于 $G_0(0)=1$，$\mathrm{L}[y_\phi(t)]=\frac{1}{s}G_0(s)$，因此

$$1=G_0(0)=\lim_{t\to\infty} y_\phi(t)=\int_0^\infty y_\delta(t)dt=\lim_{\substack{T\to 0\\ N\to\infty}}\sum_{l=1}^{N}Ty_\delta(lT-\sigma_l T),$$

其中 σ_l 是 $[0,1]$ 中的任意数 $(l=1,2,\cdots)$。于是对 $T>0$ 以及 $n=0,1,\cdots$，存在 $\varepsilon_{T,n}$，使得

$$\sum_{l=1}^{\infty}Ty_\delta(lT-\alpha_{l+n,n}T)=1+\varepsilon_{T,n}, \tag{2.7}$$

并且关于 $n=0,1,\cdots$ 一致地有

$$\lim_{T\to 0}\varepsilon_{T,n}=0. \tag{2.8}$$

将(2.7)代入(2.6)，于是由(2.1)以及无穷级数收敛的必要条件可以得到

$$\lim_{n\to\infty}[Kr_0-v(nT)-K(1+\varepsilon_{T,n})\alpha_n]=0. \tag{2.9}$$

该式刻划了第 n 个采样周期的导通率 α_n 与采样值 $v(nT)$ 之间的进一步关系，利用这一关系我们还可以证明，当 n 充分大时 $v(nT)=\alpha_n$。

事实上，当 $v(nT)\geq 1$ 时，$\alpha_n=1$。由于 $G_0(0)=1$ 以及 T 满足条件(2.5)，因此可以选择采样周期 T 使得 $1-r_0+\varepsilon_{T,n}>0$，从而

$$Kr_0-v(nT)-K(1+\varepsilon_{T,n})\alpha_n=-v(nT)-K(1-r_0+\varepsilon_{T,n})<-v(nT)\leq -1,$$

显然，当 n 充分大时上式与(2.9)相矛盾。同样地，当 $v(nT)\leq 0$ 时，$\alpha_n=0$，此时有

$$Kr_0-v(nT)-K(1+\varepsilon_{T,n})\alpha_n=Kr_0-v(nT)\geq Kr_0,$$

当n充分大时上式也与(2.9)相矛盾，因而当n充分大时，$0<v(nT)<1$，即$\alpha_n=v(nT$
于是(2.9)成为

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n[1+K(1+\varepsilon_{T,n})]=Kr_0.$$

由于(2.8)关于n一致地成立，因此

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(1+K)=\lim_{n\to\infty}\lim_{T\to 0}\alpha_n[1+K(1+\varepsilon_{T,n})]$$
$$=\lim_{T\to 0}\lim_{n\to\infty}\alpha_n[1+K(1+\varepsilon_{T,n})]=Kr_0,$$

即α_n收敛于$Kr_0/1+K$，定理证毕。

注解1　(a)由于工业过程控制系统采用统一信号，例如0～10 mA直流信号，因
r_0也应在此范围之内，即标么值应当满足$0<r_0<1$，不必考虑其它的r_0。(b)由定理
知，比例型调宽采样控制系统稳态输出的直流分量为$\frac{Kr_0}{1+K}$，因此存在稳态直流偏

$\alpha-r_0=\frac{-r_0}{1+K}$，由于系统对任何$K$都是稳态稳定的，因此可以通过增加开环放大倍
K来减小稳态直流偏差。

三、比例积分型调宽采样控制系统

我们把$G_1(s)=K_1\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)(T_i>0)$时图1所示系统称为比例积分型调宽采
控制系统。由于引进了积分环节，因此调宽采样器的输入信号$v(t)$为

$$v(t)=K_1[r_0-y(t)]+\frac{K}{T_i}\int_0^t[r_0-y(\tau)]d\tau+v_0,\qquad(3.1$$

其中v_0是由积分器初值确定的常数，不失一般性，我们假设$v_0=0$。类似于(2.4)，我们

$$\int_0^{nT}y_c(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k Ty_\phi((n-k)T-\alpha'_{n,k}T),\qquad(3.2$$

其中$\alpha'_{n,k}\in[0,\alpha_k]$，$n=1,2,\cdots$，$k=0,1,\cdots,n-1$。现记

$$c_n=-K_1[y_e(nT)+\frac{1}{T_i}\int_0^{nT}y_e(t)dt],\quad n=1,2,\cdots,$$

则由(2.1)可知存在常数c，使得$n\to\infty$时$c_n\to c$。

在研究调宽采样控制系统的稳态稳定性时，主要的问题是必须得到$n\to\infty$时，第
个采样周期的导通率α_n与采样值$v(nT)$之间更进一步的关系。类似于定理1中的(2.9
式，可以证明比例积分型调宽采样控制系统中的α_n与$v(nT)$之间有下面的关系(
附录)：

引理 1 在图 1 所示比例积分型调宽采样控制系统中，假设 $0<r_0<1$ 记 $\rho=-[1+\frac{1}{T_i}G_0'(0)]$，则存在与 T、n 有关的常数 $\rho_{T,n}$，它具有性质：极限

$$\lim_{T\to 0}\rho_{T,n}=\rho,\quad(n=1,2,\cdots)\tag{3.3}$$

关于 n 一致地成立，并且使得

$$\lim_{n\to\infty}\left[Kr_0+c-v(nT)+K_1\rho_{T,n}\alpha_n+\frac{K_1T}{T_i}(nr_0-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k)\right]=0.\tag{3.4}$$

引理 2 设 $0<r_0<1$，$G_0'(0)<0$. 如果比例积分调节器 $G_1(s)$ 中的参数 K_1、T_i 以及采样周期 T 满足

$$\rho=-\left[1+\frac{1}{T_i}G_0'(0)\right]>0,\quad 1-K_1\left(\rho+\frac{T}{T_i}\right)>0,\tag{3.5}$$

则当 n 充分大时，$\alpha_n=v(nT)$.

利用引理 1 及引理 2，不难证明下面的

定理 2 在比例积分型调宽采样控制系统中，假设 $G_0'(0)<0$，$0<r_0<1$. 如果我们选择调节器参数 K_1、T_i 以及采样周期 T，使得 (3.5) 得到满足，则该系统对任何阶跃参考输入 $r(t)=r_0\cdot 1(t)$ 都具有稳态稳定性，并且 (1.4) 中 $\alpha=r_0$.

证　由引理 1 的 (3.4) 式可知

$$\lim_{n\to\infty}[(\beta_{n+1}-\beta_n)-K_1(\rho_{T,n+1}\alpha_{n+1}-\rho_{T,n}\alpha_n)+\frac{K_1T}{T_i}(\alpha_n-r_0)=0,\tag{3.6}$$

其中定义 $\beta_n=v(nT)$，$n=1,2,\cdots$. 由于引理 2 证明了 n 充分大时 $\beta_n=\alpha_n$，因此根据 (3.3) 关于 n 的一致收敛性可知

$$\lim_{n\to\infty}(1-K_1\rho)(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{T\to 0}\left[(\alpha_{n+1}-\alpha_n)-K_1(\rho_{T,n+1}\alpha_{n+1}-\rho_{T,n}\alpha_n)+\frac{K_1T}{T_i}(\alpha_n-r_0)\right]$$

$$=\lim_{T\to 0}\lim_{n\to\infty}\left[(\alpha_{n+1}-\alpha_n)-K_1(\rho_{T,n+1}\alpha_{n+1}-\rho_{T,n}\alpha_n)+\frac{K_1T}{T_i}(\alpha_n-r_0)\right]=0.$$

由于 K_1 与 T_i 满足 (3.5)，因此 $0<K_1\rho<1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)=0.\tag{3.7}$$

将上式代入 (3.6)，注意 $\beta_n=\alpha_n$，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{K_1T}{T_i}(\alpha_n-r_0)-K_1\alpha_n(\rho_{T,n+1}-\rho_{T,n})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(1-K_1\rho_{T,n+1})(\alpha_{n+1}-\alpha_n)+\frac{K_1T}{T_i}(\alpha_n-r_0)-K_1\alpha_n(\rho_{T,n+1}-\rho_{T,n})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(\alpha_{n+1}-\alpha_n)-K_1(\rho_{T,n+1}\alpha_{n+1}-\rho_{T,n}\alpha_n)+\frac{K_1T}{T_i}(\alpha_n-r_0)\right]=0.$$

将$\frac{K_1T}{T_i}$去除上式两端并利用附录中的（A.5）可得

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n-r_0)=\lim_{n\to\infty}\left[(\alpha_n-r_0)+T_i\alpha_n\frac{\rho_{T,n+1}-\rho_{T,n}}{T}\right]=0.$$

这就是定义 2 中的（1.4），并且$\alpha=r_0$。定理证毕。

注解 2　由于许多实际自动控制系统的对象都可以用极点全部有负实部的有理分式来表示[3]，PI 调节器又被广泛地应用于工业自动控制系统中，因此本文讨论的脉冲调宽控制系统稳态稳定性理论具有相当广泛的应用。

注解 3　定理 2 提出的稳态稳定性条件是完全符合实际情形的。首先，我们指出条件$G_0'(0)<0$表示对象的总的特性具有惯性滞后：例如当考虑二阶环节时，由于

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{T_dS+1}{T_a^2S^2+2\zeta T_aS+1}\right)\Bigg|_{S=0}=T_d-2\zeta T_a,$$

因此$G_0'(0)<0$等价于$T_d<2\zeta T_a$，即对象具有滞后特性而不是超前特性。显然，这一特性在工业过程控制系统中总是得到满足的。其次，我们来观察条件（3.5）。由于$G_0'(0)<0$，因为$-G_0'(0)$又往往表示对象的滞后特性，因此比例积分调节器的积分时间T_i应当比惯性滞后时间小得多，从而对于实际系统来说，可以做到$\rho>0$。显然，对于任何ρ及T都可以使得（3.5）的第二个条件得到满足，并且减小放大倍数K_1和适当增加积分时间以及减小采样周期T，都有利于系统的稳态稳定性。这一结论与实际情形完全相一致。

附　　录

1. 引理 1 的证明。由（3.1）可知

$$\beta_n=v(nT)=K_1\left[r_0-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kTy_\delta((n-k)T-\alpha_{n,k}T)\right]$$

$$+\frac{K_1}{T_i}\left[r_0nT-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kTy_\phi((n-k)T-\alpha'_{n,k}T)\right]+c_n \qquad (A.1)$$

由于

$$\sum_{n=0}^{N}\left[r_0nT-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kTy_\phi((n-k)T-\alpha'_{n,k}T)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} [r_0 T - \alpha_0 T y_\phi((k-\alpha'_{k,0})T)] + \sum_{k=1}^{N-1} [r_0 T - \alpha_1 T y_\phi((k-\alpha'_{k+1,1})T)]$$

$$+ \cdots + [r_0 T - \alpha_{N-1} T y_\phi((1-\alpha'_{N,N-1})T)]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \alpha_0 T[1-y_\phi((k-\alpha'_{k,0})T)] + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_1 T[1-y_\phi((k-\alpha'_{k+1,1})T)]$$

$$+ \cdots + \alpha_{N-1} T[1-y_\phi((1-(\alpha'_{N,N-1})T)]$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} (r_0-\alpha_0)T + \sum_{k=1}^{N-1} (r_0-\alpha_1)T + \cdots + (r_0-\alpha_{N-1})T$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n T \sum_{k=1}^{N-n} [1-y_\phi((k-\alpha'_{k+n,n})T)] + \sum_{n=0}^{N-1} (nr_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k)T,$$

将（A.1）从0到∞求和，并注意上式则得

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ K_1 r_0 + c_n - \beta_n - K_1 \alpha_n \sum_{l=1}^{\infty} T y_\delta(lT - \alpha_{l+n,n} T)$$

$$+ \frac{K_1}{T_i} \alpha_n \sum_{l=1}^{\infty} T[1-y_\phi(lT-\alpha'_{l+n,n}T)] + \frac{K_1 T}{T_i}(nr_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k) \Big\}. \tag{A.2}$$

由于对任意的 $\lambda_l \in [0,1]$，$l=1,2,\cdots$，都有

$$\lim_{\substack{T\to 0\\ N\to\infty}} \sum_{l=1}^{N} T[1-y_\phi(lT-\lambda_l T)] = \int_0^\infty [1-y_\phi(t)]dt = \lim_{S\to 0} S\cdot\frac{1}{S}\left[\frac{1}{S}-\frac{G_0(s)}{S}\right]$$

$$= -G'_0(0)$$

因此对 $T>0$ 以及 $n=0,1,\cdots$，存在 $\varepsilon'_{T,n}$ 使得

$$\sum_{l=1}^{\infty} T[1-y_\phi(lT-\alpha'_{l+n,n}T)] = -G'_0(0) + \varepsilon'_{T,n} \text{.} \tag{A.3}$$

若记

$$\rho_{T,n} = -\left[1 + \frac{G'_0(0)}{T_i} + \varepsilon_{T,n} - \frac{1}{T_i}\varepsilon'_{T,n}\right] \tag{A.4}$$

则由 $\varepsilon'_{T,n}$ 在 $T\to 0$ 时关于 n 一致地趋于零可以得知，（A.4）定义的 $\rho_{T,n}$ 具有性质（3.3），并由（A.2）级数收敛性以及（2.7）、（A.3）可知（3.4）成立。

此外，由于 $\varepsilon_{T,n}$ 与 $\varepsilon'_{T,n}$ 是矩形法积分近似表示的余项，因此它们是 T^2 的同阶项，

见〔2〕。于是，我们还可以得到 $\rho_{T,n}$ 的进一步的性质：

$$\lim_{T\to 0}\frac{|\rho_{T,n+1}-\rho_{T,n}|}{T}\le\lim_{T\to 0}\left[\frac{|\varepsilon_{T,n+1}-\varepsilon_{T,n}|}{T}+\frac{|\varepsilon'_{T,n+1}-\varepsilon'_{T,n}|}{TT_i}\right]=0. \tag{A.5}$$

2. 引理2的证明。我们首先指出，存在具有下列性质的正整数 N_1：当 $n>N_1$ 时，如果 $\beta_n>1$，则 $\beta_{n+1}<\beta_n$，如果 $\beta_n<0$，则 $\beta_{n+1}>\beta$。事实上，设 K_1，T_i 以及 T 满足假设（3.5），记

$$\varepsilon_0=\min\left\{\frac{K_1Tr_0}{2T_i},\ \frac{K_1T(1-r_0)}{2T_i},\ 1-K_1\left(\rho+\frac{T}{T_i}\right)\right\},$$

则由（3.6）可知，对任给的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，存在正整数 $N_1=N_1(\varepsilon)$，使得当 $n>N_1$ 时有

$$\left|(\beta_{n+1}-\beta_n)-K_1(\rho_{T,n+1}\alpha_{n+1}-\rho_{T,n}\alpha_n)+\frac{K_1T}{T_i}(\alpha_n-r_0)\right|<\varepsilon. \tag{A.6}$$

容易验证，这一 N_1 就具有上述性质：如果 $\beta_n>1$，则当 $\beta_{n+1}\ge 1$ 时 $\alpha_n=\alpha_{n+1}=1$，于是由（3.6）与（A.6）可知，

$$\begin{aligned}\beta_n-\frac{K_1T(1-r_0)}{T_i}+K_1(\rho_{T,n+1}-\rho_{T,n})-\varepsilon&<\beta_{n+1}\\&<\beta_n-\frac{K_1T(1-r_0)}{T_i}+K_1(\rho_{T,n+1}-\rho_{T,n})+\varepsilon\\&<\beta_n-\frac{K_1T(1-r_0)}{2T_i}+K_1(\rho_{T,n+1}-\rho_{T,n}).\end{aligned} \tag{A.7}$$

根据（A.5），当 T 充分小时 $\beta_{n+1}<\beta_n$。如果 $\beta_n<0$，则当 $\beta_{n+1}\le 0$ 时，$\alpha_n=\alpha_{n+1}=0$，此时有

$$\beta_n+\frac{K_1Tr_0}{T_i}+\varepsilon>\beta_{n+1}>\beta_n+\frac{K_1Tr_0}{T_i}-\varepsilon>\beta_n+\frac{KTr_0}{2T_i}>\beta_n. \tag{A.8}$$

其次，我们指出，存在某 $N_2\ge N_1$，使得 $0\le\beta_{N_2}\le 1$。为此，我们不妨假设 $\beta_{N_1}\in[0,1]$，否则，取 $N_2=N_1$ 即可。如果 $\beta_{N_1}<0$，则由（A.6）可以证明 $\beta_{N_1+1}\le 1$。事实上，在 $\beta_{N_1+1}>1$ 的情况下，$\alpha_{N+1}=1$，因为 $\alpha_N=0$，因此（A.6）成为

$$\left|\beta_{N_1+1}-\beta_{N_1}-K_1\left(\rho_{T,n+1}+\frac{T}{T_i}r_0\right)\right|<\varepsilon.$$

但是由（3.3）、（3.5）以及 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 可知，当 T 适当小时上式不可能成立，因此 $\beta_{N_1}<0$ 时 $\beta_{N_1+1}\le 1$。若 $0\le\beta_{N_1+1}\le 1$，则取 $N_2=N_1+1$。如果 $\beta_{N_1+1}<0$，则由(A.8)可知，存在自然数 p，使得

$$0>\beta_{N_1+p-1}>\beta_{N_1}+\frac{(p-1)K_1Tr_0}{2T_i},\quad \beta_{N_1}+\frac{pK_1Tr_0}{2T_i}\geq 0,$$

此时 $0\leq\beta_{N_1+p}\leq 1$,即取 $N_2=N_1+p$。如果 $\beta_{N_1}>1$,则由类似讨论可知，存在$N_2\geq N_1$，使得 $0\leq\beta_{N_2}\leq 1$。

最后，我们来证明，当 $n\geq N_2$ 时，$0\leq\beta_n\leq 1$。假设不然，则存在某 $n\geq N_2$，使得 $0\leq\beta_n\leq 1$，但是 $\beta_{n+1}>1$ 或者 $\beta_{n+1}<0$。若 $\beta_{n+1}>1$，则因 $\alpha_n=\beta_n$，$\alpha_{n+1}=1$，所以从(A.6)可知

$$\beta_{n+1}<\beta_n-K_1\left(\rho_{T,n}+\frac{T}{T_i}\right)\beta_n+K_1\rho_{T,n+1}+\frac{K_1Tr_0}{T_i}+\varepsilon,$$

由 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 以及(3.5)可知，当 T 充分小时

$$\beta_{n+1}<\beta_n+(1-\beta_n)K_1\left(\rho_{T,n}+\frac{T}{T_i}\right)+K_1(\rho_{T,n+1}-\rho_{T,n})-\frac{K_1T}{T_i}(1-r_0)+\varepsilon$$

$$<1-\frac{K_1T}{2T_i}(1-r_0)+K_1(\rho_{T,n+1}-\rho_{T,n})<1,$$

这与 $\beta_{n+1}>1$ 矛盾，因此 $\beta_{n+1}\leq 1$。类似可证，不会出现这样的 $n\geq N_2$,使得 $0\leq\beta_n\leq 1$, $\beta_{n+1}<0$.这就表明，只要 $n\geq N_2$，就有 $0\leq\beta_n\leq 1$，即 n 充分大时$v(nT)=\alpha_n$.引理证毕。

参 考 文 献

〔1〕 周鸿兴，带有调宽采样器的控制系统稳态分析，自动化学报，**13**，1，(1987)，66—69。

〔2〕 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第二卷，第一分册，第九章§5，人民教育出版社，(1956)。

〔3〕 Ogata, K., System Dynamics, Prentice-Hall, Inc.,(1978).

STEADY—STATE STABILITY FOR PULSEWIDTH MODULATED SAMPLED—DATA CONTROL SYSTEMS

Zhou Hongxing

(Shandong University, Jinan)

Abstract

In this paper a precise definition on steady-state stability for a class of sampled-data control systems with a pulse-width sampler is given. It shows that any proportional (p) control system with a pulse-width sampler is steady-state stable with any open-loop gain and a proportional-integral (PI) control system with a pulse-width sampler is steady-state stable under suitable choosing a proportional parameter and an integral parameter.