第4卷第3期　　控制理论与应用　　Vol. 4, No. 3
1987年9月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Sept., 1987

关于离散系统稳定性的一个定理

王　翼
（南开大学，天津）

摘　要

本文给出了关于离散定常线性系统的稳定性的一个定理.利用数论中的一个定理，证明了系统 $x(k+1)=A\,x(k)$渐近稳定的充分必要条件是：当 $k\to\infty$ 时，$\mathrm{tr}[A^k]\to 0$.根据这个定理可以通过 A 的迹判断离散的定常线性系统的稳定性.

稳定性是设计控制系统的最基本的要求.本文考虑离散的定常线性系统

$$x(k+1)=A\,x(k) \tag{1}$$

的稳定性，其中 A 是 n 阶方阵。

如果已经求出了矩阵 A 的所有特征值，一个熟知的定理是：系统（1）渐近稳定的充分必要条件是 A 的所有特征值都在复平面的单位圆内.但当系统的维数比较高时，计算 A 的所有特征值需要大型计算机.因此人们提出了一些不需计算 A 的特征值，而直接判断 A 的特征值是否都在复平面单位圆内的方法.例如应用 Jury 判据或经双线性变换转化为判断特征多项式的根是否都在左半开平面，然后再应用 Routh—Hurwitz 判据等[1].这些方法都需要先计算 A 的特征多项式.但是正如引文[2]中指出的：基于求矩阵 A的特征多项式的方法是不可取的，因为没有一个计算矩阵A的特征多项式的数值上稳定的方法，还因为某些多项式的零点关于它的系数是很灵敏的.由于这些原因，上述的基于求 A 的特征多项式的判据只适用于较简单的情况或特征多项式容易算出的某些情况.

Strejc 指出：应用矩阵的迹判断系统（1）的稳定性是实用的，但他导出的主要定理（[3]定理12.5)是错误的.因此他未能给出应用矩阵的迹判断系统稳定性的正确方法.

下面给出应用矩阵 A 的迹判断系统（1）的稳定性的一个定理.

定理　系统（1）渐近稳定的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{tr}[A^k]=0.$$

证　必要性　设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.如果系统（1）渐近稳定；则对 $i=1, 2, \cdots, n$ 有 $|\lambda_i|<1$。

由于 A 的迹

$$\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,$$

及 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ 是 A^k 的 n 个特征值，因此对任意正整数 k,

$$\mathrm{tr}[A^k]=\lambda_1^k+\cdots+\lambda_n^k. \tag{2}$$

本文于1986年1月3日收到.1986年5月7日收到修改稿.

于是

$$|\mathrm{tr}[A^k]| \le |\lambda_1^k| + \cdots + |\lambda_n^k| \to 0 \quad (\text{当 } k\to\infty \text{ 时})$$

即得证

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{tr}[A^k] = 0.$$

充分性的证明需用到如下引理：

引理 设$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$为$n$个实数.则存在整数组列$\{(a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk}, m_k)\}$，$m_k\to\infty$，使得

$$\left|\theta_j - \frac{a_{jk}}{m_k}\right| < \frac{1}{m_k^{(1+\frac{1}{n})}}, \qquad j=1, 2, \cdots, n.$$

特别地,对任意给定的$\varepsilon>0$,存在整数组列$\{(a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk}, m_k)\}$,$m_k\to\infty$，使得

$$\left|\theta_j - \frac{a_{jk}}{m_k}\right| < \frac{\varepsilon}{m_k}, \qquad j=1, 2, \cdots, n.$$

这是数论中的一个定理.它的证明见参考文献[4]的定理4.6．下面证明充分性.

充分性 设$\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{tr}[A^k]=0$． 我们证明系统(1)渐近稳定.

由(2)式得

$$\left|\mathrm{tr}[A^k]\right| = \left|\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k\right|. \tag{3}$$

由假设及(3)有

$$\lim_{k\to\infty} |\mathrm{tr}[A^k]| = \lim_{k\to\infty} |\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k| = 0. \tag{4}$$

设γ_j和$2\pi\theta_j$分别为λ_j的模和辐角，则

$$\lambda_j = \gamma_j e^{i\theta_j\cdot 2\pi}, \qquad j=1, 2, \cdots, n,$$

其中i是纯虚数单位.由引理，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在整数组列$\{(a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk}, m_k)\}$，$m_k\to\infty$，使得

$$|m_k\theta_j - a_{jk}| < \varepsilon, \qquad j=1, 2, \cdots, n.$$

从而当$0<\varepsilon<\frac{1}{6}$时，$\lambda_j^{m_k}$的实部

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\lambda_j^{m_k}) &= \gamma_j^{m_k}\cos(m_k\theta_j\cdot 2\pi)\\ &= \gamma_j^{m_k}\cos(2\pi m_k\theta_j - 2\pi a_{jk})\\ &> \gamma_j^{m_k}\cos(2\pi\varepsilon) > \frac{1}{2}\gamma_j^{m_k}, \quad j=1, 2, \cdots, n.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{j=1}^n \mathrm{Re}(\lambda_j^{m_k}) > \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \gamma_j^{m_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n |\lambda_j^{m_k}|. \tag{5}$$

由（4）式知，当 $k \to \infty$ 时，$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}(\lambda_j^{m_k}) \to 0$，从而由（5）式得到

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^{m_k}| = 0. \tag{6}$$

由于当 $k \to \infty$ 时，$m_k \to \infty$，于是由（6）得到

$$|\lambda_j| < 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

系统（1）渐近稳定。　　证毕。

根据这个定理，可以通过逐次计算 $\mathrm{tr}[A^k]$ 判断离散定常系统（1）的稳定性。由于在实用中，我们不仅要求 A 的特征值均在单位圆内，而且要求特征值距单位圆要有一定的距离（即要求系统有一定程度的稳定性）。因此经若干次迭代（例如 30 次）即可得出结论。如经几十次迭代还看不出 $\mathrm{tr}[A^k]$ 的极限性质，这样的系统即使是稳定的，实际上也是不可用的。

我们已按此法编了相应的软件，并已在 CROMEMCO 微型计算机上运行。

参 考 文 献

〔1〕 Philips, C. L., H. T. Nagle, Digital Control System Analysis and Design, Prentice-Hall, Inc., (1984).

〔2〕 Petkov, P. Hr., M. M. Konstantinov, N. D. Christov. Computational Algorithms for Linear Control Systems: A Brief Survey, International J. of Systems Science **16**, 4, (1985), 465-477.

〔3〕 Strejc, V., State Space Theory of Discrete Linear Control, John Wiley Sons, Inc., (1981).

〔4〕 Niven, I., Irrational Numbera, John Wiley and Sons, Inc., (1956).

A THEOREM ON STABLITY OF DISCRETE CONTROL SYSTEMS

Wang Yi

(Nankai University, Tianjin)

Abstract

In this paper, a theorem on stability of discrete linear time-invariable systems is presented. Using a theorem in the number theory, we have proved that the system $x(k+1) = A\,x(k)$ is asymptotically stable if and only if $\lim_{k \to \infty} \mathrm{tr}[A^k] = 0$. By this theorem, we can verify the stability of discrete time-invariable systems.