

自动平衡倒置摆系统

——一个有趣的经典控制理论教学实验装置

黄永宣
(西安交通大学)

摘 要

本文介绍一个含有不稳定机械系统的控制系统设计, 以及经典控制理论应用于实际系统的研制和实现。

一、引 言

自动平衡倒置摆系统是在一个小车上立一根可绕轴自由运动的铜棒, 用伺服电机推动小车运动, 使铜棒垂直向上立于车上, 并且小车只在一定距离内移动。该实验装置可以作为“自动控制理论”课程的比较高级的实验装置。它所涉及的实验内容, 包括了该课程的主要内容。因此, 它又是一个多用途的综合性实验装置。

该系统的控制对象是一个单输入(力)两输出(角度和位移)的非最小相位系统。它提供了用经典控制理论解决单输入多输出系统的控制方法。据目前国内外已有的资料来看, 解决倒置摆的控制问题, 都是用现代控制理论的方法^{[1][2]}。

二、系统结构及工作原理

自动平衡倒置摆系统由小车、铜棒(立于小车上)、轨道、滑轮、伺服电机、功率放大器和控制器所组成。如图1所示。控制器由五个结构相同的运算放大器组成。如图2所示。

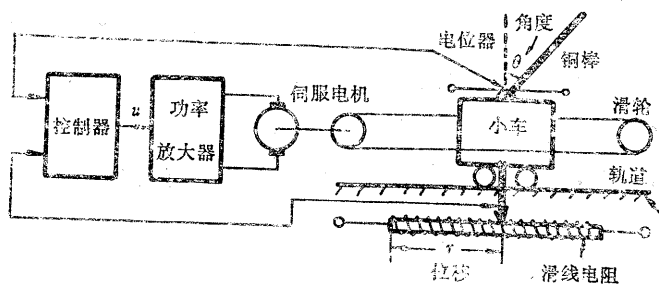


图 1 系统结构方框图

根据图 3 所示的力学示意图, 应用牛顿第二定律, 可得如下两个方程:

本文于1986年3月14日收到, 1986年9月收到修改稿。

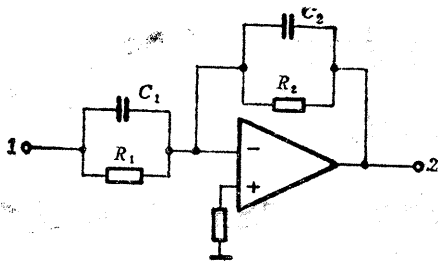


图 2 控制器单元结构图

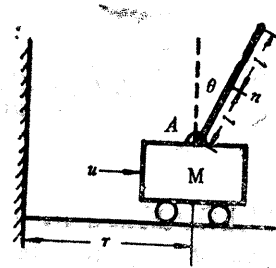


图 3 平衡摆车力学示意图

由小车在水平方向的运动, 得

$$M \frac{d^2 r}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} (r + l \sin \theta) = u. \quad (1)$$

由摆绕 A 点的旋转运动, 得

$$(J + ml^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = mgl \sin \theta - \left(m \frac{d^2 r}{dt^2} \right) l \cos \theta. \quad (2)$$

为了书写方便, 用 \dot{r} 、 \ddot{r} 、 $\dot{\theta}$ 、 $\ddot{\theta}$ 分别表示 $\frac{dr}{dt}$ 、 $\frac{d^2 r}{dt^2}$ 、 $\frac{d\theta}{dt}$ 、 $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$. 因为在此问题中, 我们必须保持摆铅垂, 可以假设 θ 、 $\dot{\theta}$ 是很小的. 在此假设下, 方程式 (1) (2) 可以线性化, 用 $\sin \theta \approx \theta$, 和 $\cos \theta \approx 1$ 代入 (1) 和 (2), 并忽略包含 $\theta \cdot \dot{\theta}^2$ 项, 又注意到

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \theta = (-\sin \theta) \dot{\theta}^2 + (\cos \theta) \ddot{\theta},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \theta = -(\cos \theta) \dot{\theta}^2 - (\sin \theta) \ddot{\theta},$$

$$J = \int_{-l}^l \frac{m}{2l} x^2 dx = \frac{1}{3} ml^2.$$

于是线性化方程为

$$(M + m) \ddot{r} + ml \ddot{\theta} = u, \quad (3)$$

$$ml \ddot{r} + \frac{4}{3} ml^2 \ddot{\theta} = mgl \theta. \quad (4)$$

将方程 (3)、(4) 两边进行拉普拉斯变换, 并对 $\theta(s)$ 、 $R(s)$ 联立求解, 得

$$G_{\theta}(s) = \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{3}{s^2 - \frac{3(M+m)g}{(4M+m)l}}, \quad (5)$$

$$G_r(s) = \frac{R(s)}{u(s)} = \frac{\frac{4}{4M+m} s^2 - \frac{3g}{(4M+m)l}}{s^4 - \frac{3(M+m)g}{(4M+m)l} s^2} \quad (6)$$

在以上各式的推导中,均忽略了摩擦系数等次要因素。根据选定的 $M=0.145\text{kg}$, $m=0.03\text{kg}$, $l=0.125\text{m}$, 得下式

$$G_\theta(s) = \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{-0.5825}{(0.1217s)^2 - 1} \quad (7)$$

$$G_r(s) = \frac{R(s)}{u(s)} = \frac{5.715[(0.13s)^2 - 1]}{s^2[(0.1217s)^2 - 1]} \quad (8)$$

$G_\theta(s)$ 、 $G_r(s)$ 的极、零点分布如图4所示。

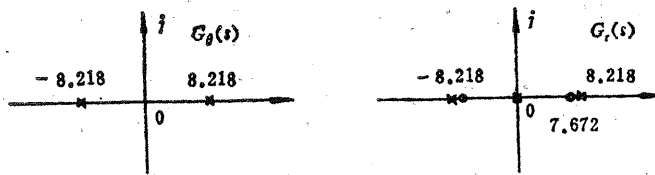


图4 $G_\theta(s)$ 、 $G_r(s)$ 极零点分布图

(7)、(8)两式表示该系统是单输入、两输出的四阶非最小相位系统。我们根据如下思想设计控制器,使闭环系统能稳定工作。设开环系统的输出变量用两个线性微分方程来描述,即

$$f_\theta(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots) = g_\theta(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots), \quad (9)$$

$$f_r(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots) = g_r(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots). \quad (10)$$

其特征方程为

$$f_\theta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (11)$$

$$f_r(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m = 0, \quad (12)$$

均有 s 平面上右半平面和(或)虚轴上的根,为使闭环系统特征方程的根都位于左半平面上,引进如下两个变量微分形式的反馈

$$u = K(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots, r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots) = c_0 \theta + c_1 \dot{\theta} + \dots + c_l \theta + d_0 r + d_1 \dot{r} + \dots + d_p r \quad (13)$$

将(13)式代入(9)式和(10)式,并对 θ 和 r 联立求解,得

$$F_\theta(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots) = 0, \quad (14)$$

$$F_r(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots) = 0. \quad (15)$$

选择反馈方程(13)的参数 c_i, d_j , 使特征方程(即(14)、(15)式的拉普拉斯变换式)

$$F_{\theta}(s) = \bar{a}_0 s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{a}_n = 0, \quad (16)$$

$$F_r(s) = \bar{b}_0 s^m + \bar{b}_1 s^{m-1} + \dots + \bar{b}_m = 0 \quad (17)$$

的根全部位于 s 平面的左半平面上。

基于上述原理,我们引用角度 θ 和位置 r 的一阶和二阶微分反馈设计控制器。取

$$u(s) = (15.64s^2 + 379.3s + 1331)\theta(s) + (9.35s^2 + 44s + 18)R(s). \quad (18)$$

将(18)式、(7)式和(8)式对 $r(s)$ 和 $\theta(s)$ 联立求解,得(16)、(17)式的闭环特征方程如下:

$$F_{\theta}(s) = 8.9525s^4 + 212.54s^3 + 811.35s^2 + 251.5s + 102.9 = 0. \quad (19)$$

其特征根为 $-0.148887 + j0.339748$, $-0.148887 - j0.339748$, -4.38093 , -19.0621 。

在此系统中, $F_r(s)$ 与 $F_{\theta}(s)$ 相同,其闭环系统极点分布如图5所示。

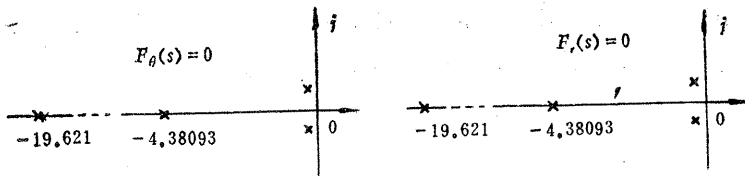


图 5 闭环系统极点分布

三、实验结果分析及讨论

1. 用经典控制理论的频域法设计非最小相位系统的控制器并不需要十分精确的对象数学模型。因为只要控制器使系统具有充分大的相位裕量,就能获得系统参数很宽范围内的稳定性。

2. 合理的简化和忽略次要因素的影响,是分析和设计控制器的好方法。因为这样,不仅使问题简化,而且实现控制规律的元器件可大为节省,从而降低生产成本,提高系统的可靠性。

致谢 本文在撰写过程中,得到万百五教授的悉心指导和帮助,谨致谢忱。

参 考 文 献

- [1] Furuta, K., T. Okutanti, H.Sone, Computer Control of a Double Inverted Pendulum, Computer and Elect, Engrg, **5**, (1978), 67—84.
- [2] Mori, S., Nishihara, H., Furuta, K., Control of Unstable Mechanical System—control of Pendulum, Int. J. Control, **23**, 5, (1976), 673—692.

AUTOMATIC BALANCING INVERTED PENDULUM
AN INTERESTING TEACHING EXPERIMENT OF
CONVENTIONAL CONTROL THEORY

Huang Yongxuan
(Xian Jiaotong University)

Abstract

This paper relates to the design of a control system for a mechanical system which contains an unstable mode and to an experiment for demonstrating that the conventional, control theory may be applied to the inverted pendulum systems.