第4卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol.4, No.4
1987年12月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Dec., 1987

配置特征结构的 $n-l$ 阶补偿器设计

程　鹏

（北京航空学院）

摘　要

本文证明了若系统可观测，$n-l$阶的动态补偿器不仅可以达到给定特征结构的配置，而且可以任意设置附加的特征值。由于这一结果，$n-l$阶动态补偿器可用配置全部特征结构的方法进行设计。

一、引　言

文献〔1—3〕研究了输出反馈对给定特征结构的配置能力和条件，当给定的特征结构不能直接用输出反馈进行配置时，〔3、4〕提出了用动态补偿器进行配置的设想和方法。应用〔4〕提出的方法，可以设计配置给定的n个特征结构的p阶补偿器，但这时由于系统维数的扩展，闭环系统附加了p个特征值。本文首先研究附加特征值的估计和设置问题。

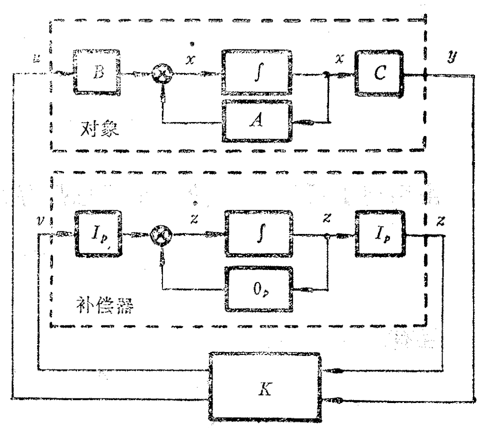

图 1

考虑以下系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ y=Cx, \qquad (1)$$

其中A、B和C分别为$n\times n$、$n\times m$和$l\times n$的常量矩阵，并且假定$\mathrm{rank}B=m$、$\mathrm{rank}C=l$。加p阶动态补偿器后的系统如图1所示。图1所对应的开环系统阵为

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} A & 0\\ 0 & 0_p\end{bmatrix},\quad \overline{B}=\begin{bmatrix} B & 0\\ 0 & I_p\end{bmatrix},\ \overline{C}=\begin{bmatrix} C & 0\\ 0 & I_p\end{bmatrix}. \qquad (2)$$

设待配置的n个特征结构为φ_n[2]，用文献〔4〕中的记号$\{\Lambda_1,\ S_{11}\}$来表示特征值构成的矩阵及相应的特征向量组。并且总假定$\mathrm{rank}[B\quad S_{11}\Lambda_1-AS_{11}]=\mathrm{rank}B$满足。

引理 1　若$\mathrm{rank}CS_{11}=l$，$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} CS_{11}\\ S_{11}\Lambda_1-AS_{11}\end{bmatrix}=l+\alpha(m\geq\alpha>0)$，则采用$p$

本文于1985年12月4日收到。1986年6月16日收到修改稿。

阶动态补偿器可使$\{A_1,\overline{S}\}$是$(\overline{A}、\overline{B}、\overline{C})$可配的，且$\alpha\le p\le n-l$。这里$\overline{S}$是将$S_{11}$延拓了$S_{21}$后所得的$(n+p)\times n$矩阵。

引理1的证明可由文献〔4〕的命题1直接得到。由引理1可得

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} A+M_1C & N_1 \\ M_2C & N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

这里S_{21}、M_1、N_1、M_2和N_2分别为$p\times n$、$n\times l$、$n\times p$、$p\times l$和$p\times p$的矩阵。

引理2 对于加p阶补偿器后的系统(2)，附加的p个特征值由$N_2-S_{21}S_{11}^{-1}N_1$决定。

证 (3)式右端的第一个矩阵就是闭环系统阵，对它进行如下的相似变换

$$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ S_{21} & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A+M_1C & N_1 \\ M_2C & N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ S_{21} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & S_{11}^{-1}N_1 \\ 0 & N_2-S_{21}S_{11}^{-1}N_1 \end{bmatrix}.$$

显然闭环系统除n个特征值是待配置外，附加的p个特征值由$N_2-S_{21}S_{11}^{-1}N_1$决定。

为了讨论如何控制$N_2-S_{21}S_{11}^{-1}N_1$的特征值，研究$p=n-l$阶动态补偿器。

二、$n-l$ 阶补偿器的性质

由引理1可知$n-l$阶补偿器总是存在的，即有$(n-l)\times n$的矩阵S_{21}，使得

$$\det\begin{bmatrix} CS_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix}\neq 0. \tag{4}$$

且有

$$\begin{aligned} S_{11}A_1-AS_{11} &= M_1CS_{11}+N_1S_{21}, \\ S_{21}A_1 &= M_2CS_{11}+N_2S_{21}. \end{aligned} \tag{5}$$

考虑矩阵$\begin{bmatrix} CS_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix}$的行空间的基底变换

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} CS_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CS_{11} \\ \overline{S}_{21} \end{bmatrix},$$

或

$$\overline{S}_{21} = FCS_{11}+GS_{21}. \tag{6}$$

这里F是某个$(n-l)\times l$的矩阵，而G是$(n-l)\times(n-l)$的可逆矩阵。由〔4〕可知用$\overline{S}_{21}$也可形成$n-l$阶的补偿器，即有

$$\begin{aligned} S_{11}A_1-AS_{11} &= \overline{M}_1CS_{11}+\overline{N}_1\overline{S}_{21}, \\ \overline{S}_{21}A_1 &= \overline{M}_2CS_{11}+\overline{N}_2\overline{S}_{21}. \end{aligned} \tag{7}$$

另外由（5）式的第一式可得

$$FCS_{11}A_1-FCAS_{11}=FCM_1CS_{11}+FCN_1S_{21}. \tag{8}$$

由（4）式可知，CAS_{11} 的行向量总可为 CS_{11} 和 S_{21} 的行向量线性表出，故可记

$$CAS_{11}=H_0CS_{11}+H_1S_{21}.$$

这里 H_0、H_1 是 $l\times l$、$l\times(n-l)$ 的矩阵。故（8）式可改写为

$$FCS_{11}A_1=F(CM_1+H_0)CS_{11}+F(CN_1+H_1)S_{21}. \tag{9}$$

引理3　经过（6）后的变换后，$\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$、$\overline{N}_1$、$\overline{N}_2$ 和 M_1、M_2、N_1、N_2 之间有下列关系成立

$$\begin{cases}\overline{M}_1=M_1-N_1G^{-1}F,\\ \overline{N}_1=N_1G^{-1},\\ \overline{M}_2=GM_2-(GN_2+FCN_1+FH_1)G^{-1}F+F(CM_1+H_0),\\ \overline{N}_2=(GN_2+FCN_1+FH_1)G^{-1}.\end{cases} \tag{10}$$

证　将（6）式代入（7）的第一式，有

$$S_{11}A_1-AS_{11}=(\overline{M}_1+\overline{N}_1F)CS_{11}+\overline{N}_1GS_{21}. \tag{11}$$

将（6）式代入（7）的第二式，得

$$GS_{21}A_1=-FCS_{11}A_1+(\overline{M}_2C+\overline{N}_2F)CS_{11}+\overline{N}_2GS_{21}. \tag{12}$$

上式代入（9）式后，可得

$$S_{21}A_1=G^{-1}[\overline{M}_2+\overline{N}_2F-FCM_1-FH_0]CS_{11}+G^{-1}[\overline{N}_2G-FCN_1-FH_1]S_{21}. \tag{13}$$

比较（5）式和（11）、（13）式可得（10）式。

（6）式的变换使附加的 $n-l$ 个特征值也发生了变化。实际上它可由矩阵 $\overline{N}_2-\overline{S}_{21}S_{11}^{-1}\overline{N}_1$ 来确定，由（6）式和（10）式可得

$$\overline{N}_2-\overline{S}_{21}S_{11}^{-1}\overline{N}_1=G(N_2-S_{21}S_{11}^{-1}N_1+G^{-1}FH_1)G^{-1}. \tag{14}$$

（14）式为研究变换（6）改变附加特征值的能力提供了方便的形式。

定理1　若系统（1）可观测，则存在 $n-l$ 阶的动态补偿器，可使系统达到给定的 n 个特征结构的配置，并可任意配置附加的 $n-l$ 个闭环特征值。

证　设系统（1）的可观测性指数为 ν。由可观测性矩阵中按排列的行序选取 n 个线性无关的行向量，选择的方法是若该向量和其行位以前诸向量线性无关，则给予选取，否则不予选取，这样选出的 n 个线性无关的行向量可表示为

$$E_iCA^i\qquad i=0,1,\cdots,\nu-1. \tag{15}$$

这里 E_0 是 $l\times l$ 的单位阵，$E_i(i\neq0)$ 是 $l_i\times l$ 的矩阵，它由 E_0 的某些行所组成，而且根据线性无关行选择的规则可知 E_i 的每一行都包括在 E_{i-1} 的行中。显然 $l\geq l_1\geq\cdots\geq l_{\nu-1}$，$l+l_1+l_2+\cdots+l_{\nu-1}=n$。

利用（15）式构成$(n-l)\times n$的矩阵S_{21}为

$$S_{21}=\begin{pmatrix} E_1\ CAS_{11} \\ E_2\ CA^2S_{11} \\ \vdots \\ E_{\nu-1}CA^{\nu-1}S_{11} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

引入以下记号.

$$CA^iS_{11}=H_{i0}CS_{11}+[H_{i1}H_{i2}\cdots H_{i\nu-1}]S_{21}, \tag{17}$$

式中$i=1,2,\cdots,\ \nu-1,\nu$。由于S_{21}的取法可知H_{ij}满足

$$\begin{cases} j>i & H_{ij}=0 \\ j=i & \operatorname{rank} H_{ij}=l_i \end{cases} \qquad (i,j=1,2,\cdots,\nu-1). \tag{18}$$

现对（16）式的S_{21}来计算$N_2-S_{21}\ S_{11}^{-1}N_1$，为此先算出$N_2$。将（5）式的第一式分别前乘$E_iCA^i(i=1,2,\cdots,\nu-1。)$，然后组合这$\nu-1$个式子，得到

$$\begin{pmatrix} E_1\ CAS_{11} \\ E_2\ CA^2S_{11} \\ \vdots \\ E_{\nu-1}\ CA^{\nu-1}S_{11} \end{pmatrix} A_1=\begin{pmatrix} E_1\ CA^2S_{11} \\ E_2\ CA^3S_{11} \\ \vdots \\ E_{\nu-1}CA^{\nu}S_{11} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} E_1\ CAM_1 \\ E_2\ CA^2M_1 \\ \vdots \\ E_{\nu-1}CA^{\nu-1}M_1 \end{pmatrix}CS_{11}$$

$$+\begin{pmatrix} E_1\ CAN_1 \\ E_2\ CA^2N_1 \\ \vdots \\ E_{\nu-1}CA^{\nu-1}N_1 \end{pmatrix}S_{21}. \tag{19}$$

用（17）式规定的记号来表示（19）式右端的第一个矩阵，并且考虑到（18）式，可得

$$\begin{pmatrix} E_1\ CA^2S_{11} \\ E_2\ CA^3S_{11} \\ \vdots \\ E_{\nu-1}CA^{\nu}S_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1\ H_{20} \\ E_2\ H_{30} \\ \vdots \\ E_{\nu-1}H_{\nu 0} \end{pmatrix}CS_{11}+X_1S_{21}, \tag{20}$$

其中

$$X_1=\begin{pmatrix} E_1H_{21} & E_1H_{22} & 0 & & 0 \\ E_2H_{31} & E_2H_{32} & E_2H_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ E_{\nu-2}H_{\nu-1\,1} & \cdots & & & E_{\nu-2}H_{\nu-1\,\nu-1} \\ E_{\nu-1}H_{\nu 1} & \cdots & & & E_{\nu-1}H_{\nu\,\nu-1} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

将（20）式代入（19）式后，并与（5）式的第二式比较，可得

$$N_2=X_1+S_{21}\ S_{11}^{-1}N_1. \tag{22}$$

故在S_{21}取为(16)式的形式时，附加的$n-l$个特征值可由$X_1=N_2-S_{21}\ S_{11}^{-1}\ N_1$来估计。

进行（6）式的变换，将（22）式代入（14）式，得

$$\overline{N}_2-\overline{S}_{21}S_{11}^{-1}\overline{N}_1=G(X_1+G^{-1}FH_1)G^{-1}. \tag{23}$$

（23）式表明矩阵对（X_1,H_1）的性质决定了变换（6）式对附加特征值的影响能力．因为 $H_1=[H_{11}0\cdots0]$，所以（X_1,H_1）对应的可观测性矩阵的前（$\nu-1$）$\times l$ 行为

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_1X_1 \\ H_1\ X_1^2 \\ \vdots \\ H_1\ X_1^{\nu-2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_{11} & & & & \mathbf{0} \\ & H_{11}E_1H_{22} & & & \\ & & H_{11}E_1H_{22}E_2H_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & * & & & \prod_{i=1}^{\nu-2}H_{ii}E_iH_{\nu-1\,\nu-1} \end{pmatrix}.$$

上式右端是下三角块阵，由于其对角元都是满列秩的矩阵，所以它的秩为 $n-l$。这表明矩阵对（X_1,H_1）可观测，且可观测性指数为 $\nu-1$，因此可通过 $G^{-1}F$ 的选择来任意配置 $\overline{N}_2-\overline{S}_{21}S_{11}^{-1}\overline{N}_1$ 的 $n-l$ 个特征值。定理证毕。

三、全部特征结构配置

定理 1 所指出的 $n-l$ 阶补偿器的性质具有重要的实用意义，它使得可以利用配置全部特征结构的方法来进行闭环系统的设计。

定理 2　若系统（1）可观测，对于给定的 n 个特征结构 $\{\Lambda_1,\ S_{11}\}$，可事先取到 $n-l$ 个附加的特征结构 $\{\Lambda_2,\ S_{12}\}$，使得特征结构组

$$\left\{\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2\end{bmatrix},\ [S_{11}\quad S_{12}]\right\} \tag{24}$$

可用 $n-l$ 阶动态补偿器达到配置。这里 Λ_2 所对应的特征值几乎可以任意设置。

证　首先构造附加的 $n-l$ 个特征结构。若 S_{21} 如(16)式所定义，令 $\begin{bmatrix} CS_{11} \\ S_{21}\end{bmatrix}^{-1}$ $=[X\quad Y]$，于是

$$CS_{11}Y=0,\ S_{21}Y=I. \tag{25}$$

当 Λ_2 阵与 Λ_1 阵无相同的特征值时，矩阵方程

$$D\Lambda_2-\Lambda_1D=S_{11}^{-1}[S_{11}\Lambda_1-AS_{11}]YK_4. \tag{26}$$

在 K_4 取定后有解，令 $S_{12}=S_{11}D$，不难验证 D 阵满足 $\mathrm{rank}[B\quad S_{11}D\Lambda_2-AS_{11}D]=\mathrm{rank}B$ 及

$$S_{11}(D\Lambda_2-\Lambda_1D)=N_1K_4. \tag{27}$$

方程（26）中的 K_4 是特定的可逆矩阵，它的取法如下，当 Λ_2 一经指定，为了简便起见，设 Λ_2 无相同的特征值，由定理 1 可选择 $K_0=G^{-1}F$，使得 Λ_2 和 $X_1+K_0H_1$ 相似，并且它们之间的相似变换阵取为 K_4，令 $K_4=G^{-1}E$，即有

$$A_2=K_4^{-1}(X_1+G^{-1}FH_1)K_4=E^{-1}G(N_2-S_{21}\ S_{11}^{-1}N_1+G^{-1}FH_1)G^{-1}E$$

$$=E^{-1}\ (\overline{N}_2-\ \overline{S}_{21}\ S_{11}^{-1}\overline{N}_1)E. \tag{28}$$

根据文献〔4〕提出的设计思想，可选定$[S_{11}\quad S_{12}]$的延拓部分为 $[\overline{S}_{21}\ \ \overline{S}_{21}D+E]$，这里$E$是任意$(n-l)\times(n-l)$的可逆矩阵。这时证明$n-l$阶补偿器的存在性，只需证当

$$S_{11}A_1-AS_{11}=\overline{M}_1CS_{11}+\overline{N}_1\ \overline{S}_{21}, \tag{29}$$

$$\overline{S}_{21}A_1=\overline{M}_2CS_{11}+\overline{N}_2\ \overline{S}_{21} \tag{30}$$

成立时，必有

$$S_{11}DA_2-AS_{11}D=\overline{M}_1CS_{11}D+\overline{N}_1(\overline{S}_{21}D+E), \tag{31}$$

$$(\overline{S}_{21}D+E)A_2=\overline{M}_2CS_{11}D+\overline{N}_2(\overline{S}_{21}D+E) \tag{32}$$

成立。事实上，将$K_4=G^{-1}E$代入（27）式，得

$$S_{11}(DA_2-A_1D)=N_1G^{-1}E=\overline{N}_1E. \tag{33}$$

（29）式后乘D加（33）式得（31）式。将（33）式的$\overline{N}_1E$代入（28）式，得

$$EA_2+\overline{S}_{21}(DA_2-A_1D)=\overline{N}_2E. \tag{34}$$

（30）式后乘D加（34）式得（32）式。定理证毕。

定理2的证明过程表明，S_{12}不能在保证$\mathrm{rank}[BS_{12}A_2-AS_{12}]=\mathrm{rank}\,B$的条件下任意选取，因为那样一般不能保证（27）式中K_4的可逆性。虽然如此，由于A_2几乎可以任意选取，定理2仍然可以看作下列极点配置定理在特征结构配置上的推广。

定理[5] 若$(A、B、C)$可控可观测，则可设计$\min\{\nu-1,\mu-1\}$阶动态补偿器，使闭环系统的$n+\min\{\nu-1,\mu-1\}$个特征值可任意配置，这里ν和μ分别表示系统的可观测性指数和可控性指数。

四、例　　题

定理1和定理2的证明都是构造性的，它们给出了$n-l$阶补偿器的设计方法，这一方法的特点是配置全部$2n-l$个特征结构。为说明设计过程，计算下面简单的例子。

系统方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u,$$

$$y=[1\quad 0]x.$$

显然系统可观测，且$\nu=n=2$，给定待配置的特征结构φ_2为

$$\left\{ \Lambda_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\quad S_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \right\}.$$

容易验证 φ_2 不是（A、b、c）可配的．现用 $n-l=1$ 阶补偿器进行全部特征结构配置，计算步骤如下：

1．取定附加的特征值 $\Lambda_2=-3$．

2．计算（28）式所需要的各项，可得

$$-3 = K_4^{-1}(4+G^{-1}F)K_4 = 4+G^{-1}F.$$

由此可知 $K_0=G^{-1}F=-7$，并可知此处 K_4 可为任意的非零常数．

3．先求 $Y=[1\quad -1]^T$，再写出（26）式为

$$D(-3) - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix} K_4,$$

解矩阵方程可得 $D=\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -7 \end{bmatrix}^T K_4$，则

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -7 \end{bmatrix} K_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -7 \\ 35 \end{bmatrix} K_4.$$

4．取 E 为任一非零常数，得

$$G = EK_4^{-1},\quad F = -7EK_4^{-1}.$$

5．计算 $[S_{11}\quad S_{12}]$ 的延拓部分

$$\overline{S}_{21} = EK_4^{-1}\left\{-7[1\quad 1] + [-1\quad -2]\right\} = EK_4^{-1}[-8\quad -9],$$

$$S_{22} = EK_4^{-1}[-8\quad -9]\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -7 \end{bmatrix} K_4 + E = 36E.$$

若取 $E=\dfrac{2}{50}$，$K_4=\dfrac{-2}{7}$，可得 $G=\dfrac{-7}{50}$，$F=\dfrac{49}{50}$．这时 $S_{12}=[1\quad -5]^T$，而

$[\overline{S}_{21}\quad S_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{56}{50} & \frac{63}{50} & \frac{72}{50} \end{bmatrix}$．这一结果和文献[3、4]一致．

在延拓部分决定后，或者通过定出（23）、（30）式中的 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$、$\overline{N}_1$、$\overline{N}_2$，或者根据文献[2]的（2·4）式，均可求出图1中的反馈增益阵 K．

参考文献

〔1〕 Srinathkumar, S. , Eigenvalue/eigenvector Assignment Using Output Feedback, IEEE Trans. , AC-**23**.(1978), 79-81.

〔2〕 杨 玲，关于反馈系统的特征结构配置，控制理论与应用，**1**,2,(1984), 103—110.

〔3〕 Sambandan, A. & Chandrasekharan, P. C. , Eigenvector Assignment Using Output Feedback, Int. J. Control, **34**. 6,(1981), 1143-1152.

〔4〕 程 鹏，配置特征结构的动态补偿器设计，自动化学报，**11**，4,(1985)，364—371.

〔5〕 Amari, R. , Vacroux, A. G. ,On the Assignment in Linear System with Fixed Order Compensators, Int. J. Control, **17**, 2,(1973), 397-405.

$(n-l)$ TH ORDER COMPENSATOR DESIGN FOR EIGENSTRUCTURE ASSIGNMENT

Cheng Peng

(Beijing Institute of Aeronautics & Astronautics)

Abstract

It is proved in this paper that the desired eigenstructure can be obtained and the extra eigenvalues can be arbitrarily assigned with a $(n-l)$th order dynamic compensator if the system is observable. Therefore $(n-l)$ th order compensator can be designed by the method of full eigenstructure assignment.