4期 控制理论与应用 Vol.4, No.4
1987年12月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Dec., 1987

代数方程的根具有负实部的判定

刘永清
（华南工学院，广州）

韩京清
（中国科学院系统科学研究所，北京）

金维言
（昆明体育电子器材研究所）

秦元勋
（中国科学院应用数学研究所，北京）

摘　要

本文给出了代数方程 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的全部根具有负实部可由不等式：$a_1a_2>\alpha_n\beta_1a_0a_3, a_2a_3>\alpha_n\beta_2a_1a_4,\cdots,a_{n-2}a_{n-1}>\alpha_n\beta_{n-2}a_{n-2}a_{n-3}a_n$ 来确定，证明了 α_n 的存在性和唯一性，以及最小可取数 α_n^* 的存在性唯一性．并对 $n\leqslant 8$ 给出了 α_n 的数值估计．

一、问题的提出

在解决某些运动稳定性（包括大系统）任务时，关键问题之一是判定 n 次代数方程的根是否都具有负实部．从实际工作中感到当 n 较大时，运用路斯—霍尔维茨条件是相当繁杂的．因此，需要寻求其他简捷的方法．1957年谢绪凯提出了这方面的工作[1],[4]．而在1976年聂义勇[2]，1978年Липатов和Соколов[3]也研究了这个问题．本文从不同角度探讨和它们有联系的另一类判定．

考虑和 n 次代数方程：$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$（其中 $a_i>0, i=0,1,\cdots,n, n\geq 3$）．　（1.1）

有关的一组条件：$a_1a_2>\alpha_n\beta_1a_0a_3, a_2a_3>\alpha_n\beta_2a_1a_4,\cdots,a_{n-2}a_{n-1}>\alpha_n\beta_{n-2}a_{n-3}a_n$，　（1.2）

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-2}$ 是预先任意给定的正数组，满足对称条件：$\beta_1=\beta_{n-2}$，$\beta_2=\beta_{n-3},\cdots$；而 α_n 是一个大于零的正数．特别当 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_{n-2}=1$ 时，即有

$$a_1a_2>\alpha_na_0a_3, a_2a_3>\alpha_na_1a_4,\cdots,a_{n-2}a_{n-1}>\alpha_na_{n-3}a_n. \quad (1.3)$$

定义　我们称正数 α_n 对（1.2）（或（1.3）式）是可取的，即对于满足（1.2）（或（1.3）式）的任何正数组 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，使得方程（1.1）的根都具有负实部．反之，就称 α_n 对（1.2）（或（1.3）式）是不可取的．

显然，若 α_n 使得（1.2）中的某个 $\alpha_n\beta_j<1$（或（1.3）式中的 $\alpha_n<1$），则 α_n 对（1.2）（或对（1.3）式）是不可取的．本文证明了（1.2）（或（1.3）式）存在可取

本文于1985年12月31日收到，1986年7月17日收到修改稿．

的 α_n，和在可取的 α_n 集中，存在最小的 α_n^*。并对 $n\le 8$ 的 α_n^* 作了数值估计；也可由文中公式（2.7）利用计算机计算 α_n。

二、关于（1.2）（或（1.3）式）中可取 α_n 和最小 α_n^* 的存在性

对方程（1.1）中的正系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，用 $K_1,K_2,\cdots,K_{n-2}$ 依次表示它的比值：$\frac{a_1a_2}{a_0a_3}$，$\frac{a_2a_3}{a_1a_4},\cdots,\frac{a_{n-2}a_{n-1}}{a_{n-3}a_n}$ 即得到

$$a_1a_2=K_1a_0a_3,a_2a_3=K_2a_1a_4,\cdots,a_{n-2}a_{n-1}=K_{n-2}a_{n-3}a_n. \tag{2.1}$$

由（2.1）容易得出下面的公式

$$\frac{a_{2s}a_{2s+4r-1}}{a_{2s}a_{2s+2r-1}}=\frac{1}{(K_{2s+2r-1})^r\prod\limits_{\alpha=1}^{r-1}(K_{2s+2\alpha-1}K_{2s+2\alpha}K_{2s+4r-2\alpha-2}K_{2s+4r-2\alpha-1})^\alpha}, \tag{2.2}$$

$$\frac{a_{2s}a_{2s+4r+1}}{a_{2s+2r}a_{2s+2r+1}}=\frac{1}{(K_{2s+2r-1}K_{2s+2r}K_{2s+2r+1})^r\prod\limits_{\alpha=1}^{r-1}(K_{2s+2\alpha-1}K_{2s+2\alpha}K_{2s+4r-2\alpha}K_{2s+4r-2\alpha+1})^\alpha}, \tag{2.3}$$

$$\frac{a_{2s+1}a_{2s+4r-2}}{a_{2s+2r-1}a_{2s+2r}}=\frac{1}{(K_{2s+2r-2}K_{2s+2r-1}K_{2s+2r})^{r-1}\prod\limits_{\alpha=1}^{r-2}(K_{2s+2\alpha}K_{2(s+\alpha)+1}K_{2(s-\alpha)+4r-3}K_{2(s-\alpha)+4r-2})^\alpha}, \tag{2.4}$$

$$\frac{a_{2s+1}a_{2s+4r}}{a_{2s+2r}a_{2s+2r+1}}=\frac{1}{(K_{2s+2r})^r\prod\limits_{\alpha=1}^{r-1}(K_{2(s+\alpha)}K_{2(s+\alpha)+1}K_{2(s-\alpha)+4r-1}K_{2(s-\alpha)+4r})^\alpha}, \tag{2.5}$$

其中 $s\ge 0,r\ge 1$。而所用到的 a 的下指标，都是集合（$0,1,\cdots,n$）中的数。

要判定（1.1）的正系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是否给出（1.1）的根都具有负实部，只需作这组数的路斯—霍尔维茨行列式

$$\Delta_{n-1}^{(n)}=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2} & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-3} & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

然后判定$\Delta_{n-1}^{(n)}$的从左上角开始的$n-1$个主子行列式及$\Delta_n^{(n)}=a_n\Delta_{n-1}^{(n)}$是否全为正。现在我们来给$\Delta_{n-1}^{(n)}$另一种表示。将它的第一行乘上$a_2$，第二行乘上$a_3,\cdots$，第$n-1$行乘上$a_n$，然后用$a_1a_2$除第一列，$a_2a_3$除第二列，继续下去，用$a_{n-1}a_n$除第$n-1$列再利用（2.1）～（2.5）立即可得

$$\Delta_{n-1}^{(n)}=a_1a_2\cdots a_{n-1}D_{n-1}^{(n)}(K_1,K_2,\cdots,K_{n-2}),\qquad (2.6)$$

其中　　$D_{n-1}^{(n)}(K_1,\cdots,K_{n-2})=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{K_3} & \frac{1}{K_3K_4K_5} & \frac{1}{K_3K_4K_5^2K_6K_7} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{K_1} & 1 & 1 & \frac{1}{K_4} & \frac{1}{K_4K_5K_6} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{1}{K_2} & 1 & 1 & \frac{1}{K_5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{1}{K_1K_2K_3} & \frac{1}{K_3} & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_2K_3K_4} & \frac{1}{K_4} & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_1K_2K_3^2K_4K_5} & \frac{1}{K_3K_4K_5} & \frac{1}{K_5} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{K_{n-2}} & 1 \end{vmatrix}$$

（2.7）

由此可见$\Delta_{n-1}^{(n)}$的从左上角开始的$n-1$个主子式为正，是和行列式(2.7)的从左上角开始的$n-1$个主子式为正等价。而行列式(2.7)的主对角线上的和上面副对角线上的元素都是1；它的其他元素不是0就是某些$\frac{1}{K_j}$的乘积。因此存在充分大的α_n，使得当

$$\frac{a_i a_{i+1}}{a_{i-1}a_{i+2}}=K_i>\alpha_n\beta_i \quad (i=1,2,\cdots,n-2) \tag{2.8}$$

成立时，行列式(2.7)从左上角开始的$n-1$个主子行列式及$\Delta_n^{(n)}=a_n\Delta_{n-1}^{(n)}$皆为正。(2.8)式就是(1.2)。因而得证：

定理1 对于预先给定的任何正数$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-2}$(其中$\beta_1=\beta_{n-2},\beta_2=\beta_{n-3},\cdots,$)，不等式(1.2)(或(1.3)式)存在可取的$\alpha_n$，即满足(由$\alpha_n$给出的)不等式(1.2)(或(1.3)式)的任何正数组$a_0,a_1,\cdots,a_n$使得代数方程(1.1)的根都具有负实部。

由不等式(1.2)的特点，显然有不小于可取数α_n的任何正数α_n'都是可取的；不大于不可取数$\tilde{\alpha}_n$的任何正数α_n''都是不可取的。再根据对(1.2)既有可取数α_n，也有不可取数α_n这个事实。立即可得：

定理2 对任意给定了正数$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-2}$(其中$\beta_1=\beta_{n-2},\beta_2=\beta_{n-3},\cdots$)不等式(1.2)存在唯一的一个正数$\alpha_n^*$具有这样的性质：大于它的任何正数都是可取的，小于它的任何正数都是不可取的，而它本身是可取的。即不等式(1.2)存在着最小的可取的α_n^*。

由定理2，我们可以把

$$a_1a_2>\alpha_n^*\beta_1a_0a_3,\ a_2a_3>\alpha_n^*\beta_2a_1a_4,\cdots,a_{n-2}a_{n-1}>\alpha_n^*\beta_{n-2}a_{n-3}a_n \tag{2.9}$$

称为是在所给$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-2}$对称正数下，使得代数方程(1.1)的根都具有负实部的一个"最佳"充分判定。

注意 因有些例子说明条件(1.3)的局限性，所以我们作更广泛的条件(1.2)的提法，其中$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$的"预先任意给定"，可以使我们选择对实际最有用的正数组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-2}$。而采用它们满足对称性(即$\beta_1=\beta_{n-2},\beta_2=\beta_{n-3},\cdots$)是基于若(1.1)的系数满足(1.2)时，则代数方程(1.1)的倒数方程的系数也应满足(1.2)。

三、$n\leq 8$时，可取α_n^*的数值估计

用关系式$\lim\limits_{K_{n-2}\to\infty} D_n^{(n+1)}(K_1,\cdots,K_{n-2})=D_{n-1}^{(n)}(K_1,\cdots,K_{n-3})$。只要展开$D_7^{(8)}$就可得$n<8$的所有情况。展开$D_7^{(8)}$得到

$$D_7^{(8)}(K_1,\cdots,K_6)=1-\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{K_i}+\sum_{i=3}^{6}\frac{1}{K_i}\left(\sum_{j=1}^{i-2}\frac{1}{K_j}\right)+2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{K_iK_{i+1}K_{i+2}}$$

$$-\sum_{i=5}^{6}\frac{1}{K_i}\left[\sum_{j=3}^{i-2}\frac{1}{K_j}\left(\sum_{k=1}^{j-2}\frac{1}{K_k}\right)\right]-3\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{K_iK_{i+1}K_{i+2}K_{i+3}}-\frac{2}{K_1K_2K_3K_5}$$

$$-\frac{2}{K_1K_3K_4K_5}-\frac{2}{K_1K_2K_3K_6}-\frac{2}{K_2K_3K_4K_6}-\frac{2}{K_1K_4K_5K_6}-\frac{2}{K_2K_4K_5K_6}$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{K_iK_{i+1}K_{i+2}K_{i+3}K_{i+4}}+\frac{3}{K_1K_2K_3K_4K_6}+\frac{3}{K_1K_3K_4K_5K_6}$$

$$-\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{K_i^2K_{i+1}K_{i+2}^2}-\frac{4}{K_1K_2K_3K_4K_5K_6}-\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{K_iK_{i+1}K_{i+2}^2K_{i+3}K_{i+4}}$$

$$+\Phi(K_1,\cdots,K_6), \tag{3.1}$$

其中 $\Phi(K_1,\cdots,K_6)$ 当 $K_i\geq 2$ 时其值为正。

设 $\widetilde{K}_7$ 为≥2 的某一常数，并令 $\lambda_7=2-\dfrac{1}{\widetilde{K}_7^2}$，$\mu_7=1-\dfrac{1}{\widetilde{K}_7}$。则当

$K_i\geq\widetilde{K}_7$ 时，$2\sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{K_iK_{i+1}K_{i+2}}-\sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{K_i^2K_{i+1}K_{i+2}^2}$

$$\geq\lambda_7\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{K_iK_{i+1}K_{i+2}}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{K_iK_{i+1}K_{i+2}K_{i+3}K_{i+4}}-\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{K_iK_{i+1}K_{i+2}^2K_{i+3}K_{i+4}}$$

$$\geq\mu_7\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{K_iK_{i+1}K_{i+2}K_{i+3}K_{i+4}}. \tag{3.3}$$

在表示式 $D_7^{(8)}-\Phi$ 中利用不等式（3.2）和（3.3）的右边来代替其左边。并把它简记为 $d_7(K_1,K_2,\cdots,K_6)$。则当 $K_i\geq\widetilde{K}_7$ 时有

$$D_7^{(8)}(K_1,K_2,\cdots,K_6)\geq d_7(K_1,K_2,\cdots,K_6).$$

以 $d_{j-1}(K_1,K_2,\cdots,K_{j-1})$ 记在 $d_j(K_1,K_2,\cdots,K_{j-1})$ 中丢掉含 $\dfrac{1}{K_{j-1}}$ 的所有项，并把 λ_j,μ_j 换成 λ_{j-1},μ_{j-1} 后的表示式，这时仍然有，当 $K_i\geq\widetilde{K}_{j-1}\geq 2$，$i=1,2,\cdots,j-3$，$j=3,4,\cdots,8$ 时

$$D_{j-1}(K_1,\cdots,K_{j-3})\geq d_{j-1}(K_1,\cdots,K_{j-3}). \tag{3.4}$$

往下求 $K^*(j)$，$j=2,\cdots,8$ 使得当 $K_i>K^*(j)$时，都有 $d_j(K_1,\cdots,K_{j-2})>0$. 在 $d_j(K_1,K_2,\cdots,K_{j-2})$中，令 $K_1=K_2=\cdots=K_{j-2}=K$ 得下列方程

$$Kd_2=K-1=0,$$
$$K^2d_3=K^2-2K=0,$$
$$K^3d_4=K^3-3K^2+K+\lambda_4=0,$$
$$K^4d_5=K^4-4K^3+3K^2+2\lambda_5K-3=0,$$
$$K^5d_6=K^5-5K^4+6K^3+(3\lambda_6-1)K^2-10K+\mu_6=0,$$
$$K^6d_7=K^6-6K^5+10K^4+(4\lambda_7-4)K^3-21K^2+(6+2\mu_7)K+4=0.$$

以 $K(i)$表示固定的$\widetilde{K}_i$后所得的方程 $K^{i-1}d_i=0$ 之最大正实根. 这里选 $\widetilde{K}_i$ 不小于 $K(i)$，且与 $K(i)$之差尽量小. 这样的$\widetilde{K}_i$是可以选取的. 事实上，除 $K^4d_5=0$ 外，在 $K^{i-1}d_i=0$ 中令 $K=\widetilde{K}_i$ 后求其最大正实根，而把它作为$\widetilde{K}_i$，正适合我们的要求.

$K(i)$的计算结果用表列出如下：

$K^{i-1}d_i=0$	$\widetilde{K}_i$	λ_i	μ_i	$K(i)$	$\mathrm{Max}\{\widetilde{K}_i,K(i)\}$
$Kd_2=0$	—	—	—	1	1
$K^2d_3=0$	—	—	—	2	2
$K^3d_4=0$	2.14	1.7816	—	$2.14<K(4)<2.15$	2.15
$K^4d_5=0$	2.15	1.7837	—	$1.14<K(5)<2.15$	2.15
$K^5d_6=0$	2.50	1.8400	0.6000	$2.50<K(6)<2.51$	2.51
$K^6d_7=0$	2.80	1.8725	0.6457	$2.79<K(7)<2.80$	2.80

以下只注意函数列 $d_1=1,d_2,d_3,\cdots,d_7$ 的下述情形

（1）$d_j(K_1,\cdots,K_{j-1})$对每个$\dfrac{1}{K_i}$是线性的，

（2）$\lim\limits_{K_i\to\infty} d_j(K_1,\cdots,K_i,\cdots,K_{j-1})\geq d_i(K_1,\cdots,K_{i-1})d_{j-i}(K_{i+1},\cdots,K_{j-1})$,

（3）$\max\{\widetilde{K}_j,K(j)\}\geq\max\{\widetilde{K}_{j-1},K(j-1)\}$

和射线

$$L_1:K_1>\max\{\widetilde{K}_j,K(j)\},\ K_2=K_2,\cdots,K_{j-1}=K_{j-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L_{j-1}:K_1=K_1,\cdots,K_{j-2}=K_{j-2},K_{j-1}>\max\{\widetilde{K}_j,K(j)\}$$

上 $d_j(K_1,\cdots,K_{j-1})$的值，就可知道 $\max\{\widetilde{K}_j,K(j)\}\doteq K^*(j)$.

即当 $K_i>\max\{\widetilde{K}_j,K(j)\}$ $i=1,2,\cdots,j-1$ 时，都有 $d_j(K_1,\cdots,K_{j-1})>0$再注意到不等式 $D_j^{(l)}\geq d_j$, $j\leq 2$, $l=3,\cdots,8$;

$$D_3^{(l)} \geq d_3,\quad D_4^{(6)} \geq d_4,\quad l=5,6,7,8,\ \text{当}\ K_i \geq 2;$$

$$D_4^{(7)} \geq d_4,\quad D_j^{(l)} \geq d_j, j=5,6,\quad l=7,8,\ \text{当}\ K_i \geq 2.5.$$

可知 $K^*(j)$是一个可取数．计算表明 $j\leq5$时 $K^*(j)$是“最佳”的．如果改进估计方法，可取数 2.51 和 2.8 是完全可以压缩的．

参 考 文 献

〔1〕 谢绪凯，研究线性系统稳定性问题的一种方法，东北工学院自动控制系，1957年2月第一届全国力学学术会议，北京．

〔2〕 复旦大学编，一般力学，上海科技出版社，（1960），193—194．

〔3〕 聂义勇，多项式稳定性的一类新判据，力学,2,（1976.），110—116．

〔4〕 A .B. Липатов, Н. И. Соколов, О Некоторых Достатодных Условиях Устойцивости и Неўстойцивости Линейных Непрерывных Стационарных Систем, а. ит., 9,（1978）, 30—37.

〔5〕 谢绪凯，现代控制理论基础，辽宁人民出版社，沈阳，（1981）．

ON THE CRITERION FOR ALL ROOTS OF THE POLYNOMIAL EQUATION POSSESSING NEGATIVE REAL PARTS

Liu Yongqing, Han Jingqing, Jin Weiyan, Chin Yuanshun

Abstract

In this paper, it is proved that all roots of the polynomial equation $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ have negative real parts if the following inequalities hold: $a_1a_2>\alpha_n\beta_1a_0a_3$, $a_2a_3>\alpha_n\beta_2a_1a_4,\cdots$, $a_{n-2}a_{n-1}>\alpha_n\beta_{n-2}a_{n-3}a_n$. The existence and the uniqueness of the real α_n are proved also. At the same time, the existence and uniqueness of the most minimun numbers α_n^* which can be choosed are obtained. The estimated formula real α_n for $n\leq8$ are obtained.