第4卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol. 4, No. 4
1987年12月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Dec., 1987

采样周期对最优采样值调节器稳定性的影响

孙 莱 祥

（复旦大学，上海）

摘　　要

本文研究了最优采样值调节器的渐近稳定性，在一般最优采样值调节器和稳定最优采样值调节器的两种情形下，给出了最优采样值调节器为渐近稳定的条件，从而提供了采样周期的选择方法。

一、问 题 的 提 出

关于最优采样值线性调节器的问题，文献〔3〕、〔4〕、〔6〕已经研究过，但都未直接讨论采样周期对其渐近稳定性的影响。而最优采样值调节器在计算机控制系统中有重要作用，所以本文就来考察这个问题。

设控制对象是下列系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

这里 $x \in R^n$ 是状态向量，$u \in R^r$ 是输入向量，A、B 是相应阶数的常值矩阵。评价函数为

$$J = \int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)dt, \tag{2}$$

这里 $Q \in R^{n\times n}$，$R \in R^{r\times r}$ 是对称矩阵。

假如输入是采样值，即

$$u(t) = u_k,\quad kT \leq t < (k+1)T, \tag{3}$$

这里 T 是数字控制时的采样周期。这就得到最优采样值调节器问题：

$$x_{k+1} = \widetilde{A}x_k + \widetilde{B}u_k, \tag{4}$$

$$\widetilde{J} = \sum_{k=0}^{\infty}(x_k'\widetilde{Q}x_k + 2x_k'\widetilde{S}u_k + u_k'\widetilde{R}u_k), \tag{5}$$

其中

$$\widetilde{A} = e^{AT},\quad \widetilde{B} = \int_0^T e^{At}dtB. \tag{6}$$

$$\widetilde{Q} = \int_0^T (e^{A't})Qe^{At}dt,\quad \widetilde{S} = \int_0^T [\int_0^t e^{AS}Bds]'Qe^{At}dt. \tag{7}$$

本文于1985年2月9日收到，1986年8月4日收到修改稿。

$$\widetilde{R}=RT+\int_0^T[\int_0^t e^{AS}Bds]'Q[\int_0^t e^{AS}Bds]dt. \tag{8}$$

求使$\widetilde{J}$最小的$\{u_k\}$。

应用最小原理，最小损失和离散最优控制是[4]

$$\widetilde{J}=x_0'Kx_0,$$

$$u_k=-Gx_k=-[\widetilde{R}+\widetilde{B}'K\widetilde{B}]^{-1}[\widetilde{S}+\widetilde{B}'K\widetilde{A}]x_k, \tag{9}$$

其中 K 是下述代数 Riccati方程的解

$$\widetilde{A}'K\widetilde{A}-K+\widetilde{Q}=[\widetilde{S}'+\widetilde{A}'K\widetilde{B}][\widetilde{R}+\widetilde{B}'K\widetilde{B}]^{-1}[\widetilde{S}+\widetilde{B}'K\widetilde{A}]. \tag{10}$$

若连续系统（1）中，（A，B）是可稳定的，（2）中 $Q=H'H\geq 0$，$R>0$，（A，H）是可观测的，则连续系统（1）和评价函数（2）所对应的 Riccati 方程

$$A'P+PA-PBR^{-1}B'P=-Q \tag{11}$$

有唯一的非负定解 P，且闭环系统 $\dot{x}=(A-BR^{-1}B'P)x$ 是渐近稳定的。但是对于采样值系统（4）和评价函数（5），所得的最优闭环系统 $x_{k+1}=(\widetilde{A}-\widetilde{B}G)x_k$ 是否还是渐近稳定的呢？可用下述例子来说明。

例 1　连续系统是 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$，评价函数为 $J=\int_0^\infty[x'H'Hx+u'u]dt$，$H=[0,\ 1]$。则（$A$，$B$）是可稳定的，($A$，$H$)是可观测。Riccati 方程（11）的解是 $P=\begin{bmatrix}\sqrt{2\sqrt{2}-2} & 1-\sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2} & 2\sqrt{\sqrt{2}-1}\end{bmatrix}$，最优反馈控制是 $u=-R^{-1}B'Px=(-\sqrt{2\sqrt{2}-2},\ -1+\sqrt{2})x$。由 $\det(\lambda I-A+BR^{-1}B'P)=0$，得到

$$\lambda=\frac{-\sqrt{2\sqrt{2}-2}\pm\sqrt{-2\sqrt{2}-2}\,i}{2}$$，所以闭环系统是渐近稳定的。

由（4）～（8），取 $T=\pi$ 时，采样值系统是

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}\cos T & \sin T\\ -\sin T & \cos T\end{bmatrix}_{T=\pi}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \widetilde{B}=\begin{bmatrix}\sin T\\ \cos T-1\end{bmatrix}_{T=\pi}=\begin{bmatrix}0\\ -2\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{Q}=\begin{pmatrix}\frac{T}{2}-\frac{1}{4}\sin 2T & \frac{1}{4}\cos 2T-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\cos 2T-\frac{1}{4} & \frac{T}{2}+\frac{1}{4}\sin 2T\end{pmatrix}_{T=\pi}=\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2} & 0\\ 0 & \frac{\pi}{2}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{S}=[\frac{1}{4}\cos 2T-\cos T+\frac{3}{4}\quad \frac{T}{2}+\frac{1}{4}\sin 2T-\sin T]\Big|_{T=\pi}=[2,\ \frac{\pi}{2}],$$

$$\widetilde{R}=\frac{5T}{2}+\frac{1}{4}\sin 2T-2\sin T\Big|_{T=\pi}=\frac{5\pi}{2}.$$

把以上各式代入方程（10），得到

$$\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{12} & K_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{12} & K_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}2K_{12}+2\\ 2K_{22}+\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\left[\frac{5\pi}{2}+4K_{22}\right]^{-1}\left[2K_{12}+2,\ 2K_{22}+\frac{\pi}{2}\right]+\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2} & 0\\ 0 & \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}.$$

可以验证，这个方程的解不存在，即采样值最优调节器的解不是对任何采样周期都存在，更谈不上它的渐近稳定性了。因此可以提出这样的问题：在什么样的条件下，最优采样值调节器的渐近稳定解存在？它和采样周期有什么关系？下面分两种情况来讨论这个问题。

二、一般最优采样值调节器

对于（4）（5），进行下列状态反馈

$$\mathbf{u}_k=-\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}\mathbf{x}_k+\mathbf{v}_k,\tag{12}$$

$\mathbf{v}_k$ 是新的输入。这时（4）（5）变为

$$\mathbf{x}_{k+1}=(\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S})\mathbf{x}_k+\widetilde{B}\mathbf{v}_k,\tag{13}$$

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}[\mathbf{x}_k'\ \ \mathbf{v}_k']\begin{bmatrix}\widetilde{Q}-\widetilde{S}'\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S} & 0\\ 0 & \widetilde{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_k\\ \mathbf{v}_k\end{bmatrix}.\tag{13$'$}$$

假定已经求得使（13）$'$中的 J 为最小的$\{v_k^*\}$，利用闭环系统可以得到$\{x_k^*\}$，然后代入（12），就得到使（5）最小的最优控制输入$\{u_k^*\}$。对于由（13）和（13）$'$所确定的一般最优采样值调节器，则有

定理1 连续系统（1）中（A, B）是可稳定的，记 $Q=H'H\geq0$, $R>0$, (A, H) 可观测，采样周期 T 满足 Kalman 条件[1]，即 $\mathrm{Re}[\lambda_i(A)-\lambda_j(A)]=0$时，$\lambda_i(A)-\lambda_j(A)\neq\frac{2\pi\alpha i}{T}(\alpha=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$。则使（13）$'$最小的最优控制唯一存在，且最优闭环系统

$$\mathbf{x}_{k+1}=(\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}-\widetilde{B}K)\mathbf{x}_k,\tag{14}$$

$$K=(\widetilde{R}+\widetilde{B}'P\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}'P\widetilde{A}\tag{14$'$}$$

是渐近稳定的.

这里(14)′中的P是由$\widetilde{Q}-\widetilde{S}'\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}$和$\widetilde{R}$所确定的离散系统 Riccati 方程的解.

证　由一般离散系统的最优调节器理论，只要证明$(\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S},\widetilde{B})$是可稳定的，$(\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S},\ \widetilde{H})$是可观测的. 这里$\widetilde{H}$是从$\widetilde{Q}-\widetilde{S}'\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}=\widetilde{H}'\widetilde{H}$的分解得到的.

(i)因为$(A,\ B)$可稳定和采样周期T满足Kalman条件,利用[7] 359 页的证法，可同样证明$(\widetilde{A},\ \widetilde{B})$也是可稳定的.($\widetilde{A}=e^{AT}$, $\widetilde{B}=\int_0^T t^{At}dtB$)从而可直接推得$(\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{R}^{-1}S,\ \widetilde{B})$是可稳定的.

(ii) $\widetilde{Q}-\widetilde{S}'\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}=\widetilde{H}'\widetilde{H}\geq 0$(参见文献[3]引理1).

(iii)若记 $W=\begin{bmatrix}\widetilde{Q} & \widetilde{S}' \\ \widetilde{S} & \widetilde{R}\end{bmatrix}$，先证$W>0$. 由(7)(8)可得

$$W=\int_0^T\begin{bmatrix} e^{A't}Qe^{At} & e^{A't}Q\int_0^t e^{As}Bds \\ \left(\int_0^t e^{As}Bds\right)'Qe^{At} & \left(\int_0^t e^{A'}Bds\right)'Q\left(\int_0^t e^{As}Bds\right)\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & RT\end{bmatrix}=X+Y.$$

$$\because X=\int_0^T\begin{bmatrix} e^{A't} \\ \left(\int_0^t e^{As}Bds\right)'\end{bmatrix}Q\left[e^{At},\ \int_0^t e^{As}Bds\right]dt,$$

又$Q\geq 0$, $\therefore X=X'\geq 0$. 另外显然有$Y\geq 0$.

现在要证明$W>0$，即为非奇异矩阵. 不然，存在$\alpha'=(\alpha_1',\ \alpha_2')\neq 0$，而$(\alpha_1',\ \alpha_2')\ W=0$. 由此推得

$$(\alpha_1',\ \alpha_2')W\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}=0,\ 或$$

$$(\alpha_1',\ \alpha_2')\ X\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}=0,\ (\alpha_1',\ \alpha_2')\ Y\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}=0.$$

由上述第二式推得$\alpha_2'RT\alpha_2=0$. 但$R>0$，所以只能$\alpha_2=0$，把它代入第一式，得到

$$(\alpha_1',\ 0)\int_0^T\begin{bmatrix} e^{A't}Qe^{A'} & * \\ * & *\end{bmatrix}dt\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ 0\end{pmatrix}=0.$$

即
$$\alpha_1'\int_0^T e^{A't}Qe^{At}dt\alpha_1=\int_0^T \alpha_1'e^{A't}H'He^{At}\alpha_1 dt=0.$$

由$(A,\ H)$可观测得到$\alpha_1=0$，这和$\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}\neq 0$矛盾，所以$W>0$.

其次，由$Q\geq 0$，$R>0$及（7）（8）可知$\widetilde{Q}\geq 0$和$\widetilde{R}>0$，再加上$W>0$就可推得$\widetilde{Q}-\widetilde{S}'\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}>0$（参见文献〔7〕326页）。这就表明$(\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S},\ \widetilde{H})$是可观测的，定理得证。

三、稳定最优采样值调节器

所谓稳定最优调节器是指寻找使J达到最小的控制作用，而这种控制作用限制在容许控制集$U_s=\{u_k|$使$\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$的$u_k\}$中。这种调节器称为稳定最优调节器，为此我们应用〔5〕的结果。

所考察的系统是$x_{k+1}=Ax_k+Bu_k$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$，评价函数是

$$\min J(x_0,\ u)=\sum_{k=0}^{\infty}[x_k',\ u_k']\begin{bmatrix} Q & C' \\ C & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}.$$

正定性条件 $R+B'PB>0$。 （1a）

Riccati方程 $P=A'PA+Q-(C+B'PA)'(R+B'PB)^{-1}(C+B'PA)$。 （1b）

渐近稳定性 $|\lambda(A_+)|<1$，$A_+\triangleq A-B(R+B'PB)^{-1}(C+B'PA)$。 （1c）

文〔5〕在除去$\begin{bmatrix} Q & C' \\ C & R \end{bmatrix}\geq 0$的要求下，给出了满足（1a）（1b）（1c）矩阵$P$的条件，这样利用〔5〕中定理2，可得到如下结果：

定理2 若（i）$(A,\ B)$可稳定；（ii）采样周期T满足Kalman条件；（iii）（7）（8）中的$\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$，$\widetilde{R}$，$\widetilde{S}$满足$|\lambda(\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S})|<1$，则对于稳定最优采样值调节器（4）（5），满足（1a）（1b）的实对称解P唯一存在。并由此构成的闭环系统$x_{k+1}=(\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{G})x_k$是渐近稳定的，其中$\widetilde{G}=(\widetilde{R}+\widetilde{B}'P\widetilde{B})^{-1}(\widetilde{S}+\widetilde{B}'PA)$。证明略。

例 2 $\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$，$J=\int_0^{\infty}(x'\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x+u^2)dt$，

这里$H=[\sqrt{q},0]$，且$(A,\ B)$可控，$(A,\ H)$可观。

取$q=1$，$T=1$时，可以验证定理1和定理2的条件都满足。所以作为一般最优采样值调节器和稳定最优采样值调节器，闭环系统都是渐近稳定的。事实上由〔5〕中例2计算可得，最优反馈矩阵是

$$G=[0.4986,\ 0.9986],$$

最优闭环系统是

$$x_{k+1}=(\widetilde{A}-\widetilde{B}G)x_k=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}x_k.$$

可以验证闭环系统确是渐近稳定的。

应用定理2到单输入系统，有如下推论。

推论　对于系统 $\dot{x}=Ax+bu$，若 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$，且 $(A,\ b)$ 可稳定。则当 T 充分大时，稳定最优采样值调节器是渐近稳定。

此推论的直观含义在于对一个稳定的连续系统，加上一个常值控制时，系统仍是渐近稳定的。

笔者对文献〔3〕中的一阶系统和一个二阶系统进行数值计算。计算结果和上述推论是一致的，且随着 T 的增大，还呈现某种单调性，给采样周期的选取提供了一个参考。

参　考　文　献

〔1〕 Kalman, R. E. et, Contr. diff. Equation, 1, (1962), 189－214.
〔2〕 Chen, C. T., Introduction to linear System Theory, (1970).
〔3〕 Levis, A. H. et, Int. J. Contr., **13**, (1971), 343.
〔4〕 Melzer, S. M. et, Automatic, **7**, (1971), 367.
〔5〕 Molinari, B. P., IEEE Trans., AC－**20**, (1975), 396.
〔6〕 Satorn, F. et, Int. J. Contr., **29**, (1979), 145.
〔7〕 须田信英(日)等著，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，北京，(1979).

THE RELATION BETWEEN SAMPLING PERIOD AND STABILITY OF OPTIAML SAMPLED-DATA REGULATOR

Sun Laixiang
(Fudan University, Shanghai)

Abstract

This paper discusses the relation between the sampling period and the stability of the conventional linear sampled－data regulator as well as the optimal sampled－data linear regulator, suggesting a method for selecting the sampling period.