卷第1期 1988年3月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.5, No.1 March, 1988

用方块脉冲函数求解非线性系统的进一步结果

许 茂 增

（重庆交通学院管理系）

摘 要

本文在已有文献基础上通过分段线性化处理，得到了用方块脉冲函数求解非线性系统的显式递推算法，讨论了其它几种可能的线性化途径，分析了所给算法的收敛性。与文献已有算法相比，本文给出的算法可直接用计算机来求解，便于应用。但收敛性分析表明，截断误差由二阶降为一阶。最后给出了算例，结果是令人满意的。

一、问题的叙述

对于非线性系统

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=f(x(t),\ u(t),\ t),\ \forall t\in[0,\ T),\\&x(0)=x_0,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 和 $u(t)\in R^p$ 分别为系统的状态向量和控制向量，文献[1]给出了如下用方块脉冲函数求解 $x(t)$ 的递推算法：

$$\left.\begin{aligned}&\overline{x}_1=x_0+T\overline{f}_1/2m,\\&\overline{x}_{k+1}=\overline{x}_k+(\overline{f}_{k+1}+\overline{f}_k)T/2m,\\&k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中

$$\overline{f}_k=\frac{m}{T}\int_{(k-1)T/m}^{kT/m}f(\overline{x}_k,\ u(t),\ t)dt。\tag{3}$$

由（3）式可以看出，$\overline{f}_k$中隐含着$\overline{x}_k$。这意味着（i）不能用计算机直接求解$\overline{f}_k$；(ii)要由（2）式中求出$\overline{x}_k$，还必须求解非线性代数方程。因此，由（2）式和（3）式构成的求解$\overline{x}_k$的递推算法看来并不实用。

非线性的线性化是解决非线性问题的一般方法。下面通过分段线性化处理，采取特殊措施使算法（2）显式化，从而可以直接用于求解$\overline{x}_k$。与其它可能的线性化处理途

本文于1987年2月25日收到。1987年10月4日收到修改稿。

径的比较表明了所给显式递推算法的优点。最后，对该算法的收敛性做了分析；给出了算例，结果是令人满意的。

二、改进的递推算法

定义区间〔0, T）上的 m 段方块脉冲函数（BPF）如下：

$$\pi_i(t) \triangleq \begin{cases} 1 & (i-1)h \le t < ih \qquad h=\dfrac{T}{m}, \\ 0 & \text{其它} \qquad\qquad i=1, 2, \cdots, m. \end{cases}$$

设 $x(t)$ 和 $f(x(t), u(t), t)$ 对 $\pi_i(t)(i=1, 2, \cdots, m)$ 的展开式分别为

$$\mathrm{x}(t) \simeq \sum_{i=1}^{m} \overline{\mathrm{x}}_i \pi_i(t), \tag{4}$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t), t) \simeq \sum_{i=1}^{m} \overline{\mathrm{f}}_i \pi_i(t), \tag{5}$$

其中

$$\overline{\mathrm{x}}_i \triangleq \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(\overline{\mathrm{x}}_i, \mathrm{u}(t), t)dt, \tag{6}$$

$$\overline{\mathrm{f}}_i \triangleq \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(\overline{\mathrm{x}}_i, \mathrm{u}(t), t)dt. \tag{7}$$

这里采用了文献〔1〕对 $\overline{f}_i$ 的定义。文献〔2〕指出，只要 $\mathrm{x}(t)$, $f(\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t), t)$ 在〔0, T）上对 t 绝对可积，则（4）式和（5）式的右边是相应等式左边函数的最优平方逼近。

把（1）中第一式从 0 到 t 积分并注意到第二式，我们有

$$\mathrm{x}(t)-\mathrm{x}(0)=\int_0^t f(\mathrm{x}(s), \mathrm{u}(s), s)ds. \tag{8}$$

把（4）式和（5）式代入（8）式得

$$\sum_{i=1}^{m}(\overline{\mathrm{x}}_i-\mathrm{x}_0)\pi_i(t)=\int_0^t \sum_{i=1}^{m} \overline{\mathrm{f}}_i \pi_i(s)ds$$

$$=\sum_{i=1}^{m} \overline{\mathrm{f}}_i \int_0^t \pi_i(s)ds. \tag{9}$$

利用 BPF 的积分运算性质

$$\int_0^t \pi_i(s)ds \simeq \frac{h}{2}\pi_i(t)+h\sum_{j=i+1}^{m}\pi_j(t),$$

由（9）式整理即得（2）式。

由于（7）式中隐含着 $\overline{x}_i$，而且一般是非线性的，为了得到求解 $\overline{x}_k$ 的显式递推算

法，我们从（7）式中的被积函数 $f(\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t), t)$ 入手进行线性化处理。为此，我们假定 $f(\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t), t)$ 对 $\mathrm{x}(t)$ 具有连续的一阶偏导数。在这样的假设之下，把 $f(\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t), t)$ 在 $\overline{\mathrm{x}}_{i-1}$ 处展开成台劳级数并取一阶近似得到

$$\overline{\mathrm{f}}_i \simeq \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} \left[f(\overline{\mathrm{x}}_{i-1}, \mathrm{u}(s), s) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}=\overline{\mathrm{x}}_{i-1}} (\overline{\mathrm{x}}_i - \overline{\mathrm{x}}_{i-1})\right] ds. \tag{10}$$

定义

$$\overline{\mathrm{F}}_{i,0} \triangleq \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(\overline{\mathrm{x}}_{i-1}, \mathrm{u}(s), s) ds, \tag{11}$$

$$\overline{\mathrm{F}}_{i,1} \triangleq \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}=\overline{\mathrm{x}}_{i-1}} ds. \tag{12}$$

把（11）和（12）代入（10）得

$$\overline{\mathrm{f}}_i = \overline{\mathrm{F}}_{i,0} + \overline{\mathrm{F}}_{i,1} (\overline{\mathrm{x}}_i - \overline{\mathrm{x}}_{i-1}). \tag{13}$$

再把（13）式代入（2）式得

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{x}}_1 = \mathrm{x}_0 + \frac{1}{2}h[\overline{\mathrm{F}}_{1,0} + \overline{\mathrm{F}}_{1,1}(\overline{\mathrm{x}}_1 - \mathrm{x}_0)],\\
&\overline{\mathrm{x}}_{i+1} = \overline{\mathrm{x}}_i + \frac{1}{2}h[\overline{\mathrm{F}}_{i+1,0} + \overline{\mathrm{F}}_{i+1,1}(\overline{\mathrm{x}}_{i+1} - \overline{\mathrm{x}}_i) + \overline{\mathrm{F}}_{i,0} + \overline{\mathrm{F}}_{i,1}(\overline{\mathrm{x}}_i - \overline{\mathrm{x}}_{i-1})],
\end{aligned}\right\}$$

$$i = 1, 2, \cdots, m-1. \tag{14}$$

把（14）稍加整理，得到如下递推算式：

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{x}}_1 = \mathrm{x}_0 + \frac{1}{2}h\left(I_n - \frac{1}{2}h\overline{\mathrm{F}}_{1,1}\right)^{-1}\overline{\mathrm{F}}_{1,0},\\
&\overline{\mathrm{x}}_{i+1} = \overline{\mathrm{x}}_i + \frac{1}{2}h\left(I_n - \frac{1}{2}h\overline{\mathrm{F}}_{i+1,1}\right)^{-1}[\overline{\mathrm{F}}_{i+1,0} + \overline{\mathrm{F}}_{i,0} + \overline{\mathrm{F}}_{i,1}(\overline{\mathrm{x}}_i - \overline{\mathrm{x}}_{i-1})],\\
&i = 1, 2, \cdots, m-1.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

如果定义

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{F}}_{0,0} \triangleq 0, \quad \overline{\mathrm{F}}_{0,1} \triangleq 0,\\
&\overline{\mathrm{x}}_0 \triangleq \mathrm{x}_0, \quad \overline{\mathrm{x}}_{-1} \triangleq 0,
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

并考虑到（13）式，则（15）可进一步写成如下统一的形式：

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\mathrm{x}}_i=\overline{\mathrm{x}}_{i-1}+\frac{1}{2}h\left(I_n-\frac{1}{2}h\overline{\mathrm{F}}_{i,1}\right)^{-1}(\overline{\mathrm{F}}_{i,0}+\overline{\mathrm{f}}_{i-1}),\\&i=1,\ 2,\ \cdots,\ m_{\circ}\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

（11）～（13）式及（16）式和（17）式一起就构成了求解非线性系统（1）的状态向量 $\mathrm{x}(t)$的基本公式。

三、三种可能的线性化处理途径的比较

毫无疑问，可以通过其它的线性化处理途径利用 BPF 的性质来求解非线性系统（1）。一种最直接的途径就是先把 $f(\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t),t)$对 $\mathrm{x}(t)$进行线性化处理，然后再利用 BPF 的性质求解。具体如下：

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{x}}(t)&=f(\mathrm{x}_0,\mathrm{u}(t),t)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_0}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+O((\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^{\prime}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0))\\&\approx\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_0}x(t)+\left[f(\mathrm{x}_0,\mathrm{u}(t),t)-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_0}\mathrm{x}_0\right]\\&=\mathbf{A}(\mathrm{u}(t),\mathrm{x}_0,t)\mathrm{x}(t)+g(\mathrm{u}(t),\mathrm{x}_0,t)_{\circ}\end{aligned}\tag{18}$$

（18）中　$A(\mathrm{u}(t),\mathrm{x}_0,t)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_0},$

$$g(\mathrm{u}(t),\mathrm{x}_0,t)=f(\mathrm{x}_0,\mathrm{u}(t),t)-\mathbf{A}(\mathrm{u}(t),\mathrm{x}_0,t)\mathrm{x}_{0\circ}$$

由于 $\mathrm{u}(t)$为已知，所以（18）可以认为是时变线性系统，它可以用文献[1]中给出的算法来求解。可以预料，这样求得的 $\mathrm{x}(t)$，其精度不如由递推算法（17）求出的 $x(t)$的精度高，因为（17）是采用分段线性化处理得到的，而（18）则是由对 x_0 的一次线性化处理得到的。

另一种可以考虑的线性化途径是直接对（2）中的 $\overline{f_i}$ 进行线性化处理，即取

$$\overline{\mathrm{f}}_{i+1}=\left.\overline{\mathrm{f}}\right|_{\overline{\mathrm{x}}_{i+1}=\overline{\mathrm{x}}_i}+\left.\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+1}}\right|_{\overline{\mathrm{x}}_{i+1}=\overline{\mathrm{x}}_i}(\overline{\mathrm{x}}_{i+1}-\overline{\mathrm{x}}_i)_{\circ}$$

这时一则必须首先求出 $\overline{f}_{i+1}$ 的表达式，然后才能作上述处理，而求 $\overline{\mathrm{f}}_{i+1}$ 的表达式可能是很麻烦的，且得用手工做，此外还得增加新的程序来计算 $\left.\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+1}}\right|_{\overline{\mathrm{x}}_{i+1}=\overline{\mathrm{x}}_i}$；二则可以证明，由此求得的 $\mathrm{x}(t)$与由(17)求得的 $\mathrm{x}(t)$具有同阶截断误差。因此，这种线性化处理方法也是不足取的。

综上所述，由（17）等构成的算法具有下述优点：

（i）它具有不低于其它线性化的方法精度。

（ii）当求$\overline{\mathrm{x}}_i$时，$\overline{\mathrm{x}}_{i-1}$是已知的，又$\mathrm{u}(t)$是$t$的已知函数，所以$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}_{i-1}}$是变量$t$的显式函数，因而可用计算机来求$\overline{\mathrm{F}}_{i,0}$和$\overline{\mathrm{F}}_{i,1}$。

（iii）由于$\overline{\mathrm{F}}_{i,0}$和$\overline{\mathrm{F}}_{i,1}$中的被积函数都是矩阵（向量是特殊的矩阵），所以可用相同程序来计算$\overline{\mathrm{F}}_{i,0}$和$\overline{\mathrm{F}}_{i,1}$。

以上表明，本文给出的算法完安可用计算机来实现，而且程序设计是简单的。

四、算法（17）的收敛性和截断误差

为方便计，记$ih=t_i$，于是由（17）有

$$\frac{1}{h}(\overline{\mathrm{x}}_{i+1}-\overline{\mathrm{x}}_i)=\frac{1}{2}[\overline{\mathrm{F}}_{i+1,0}+\overline{\mathrm{F}}_{i,0}+\overline{\mathrm{F}}_{i+1,1}(\overline{\mathrm{x}}_{i+1}-\overline{\mathrm{x}}_i)+\overline{\mathrm{F}}_{i,1}(\overline{\mathrm{x}}_i-\overline{\mathrm{x}}_{i-1})]。\tag{19}$$

对（19）式左端，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(\overline{\mathrm{x}}_{i+1}-\overline{\mathrm{x}}_i)&=\frac{1}{h^2}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathrm{x}(t)dt-\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{x}(t)dt\right]\\&=\frac{1}{h^2}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\mathrm{x}(t_i)+\dot{\mathrm{x}}(t_i)(t-t_i)+\frac{1}{2}\ddot{\mathrm{x}}(t_i)(t-t_i)^2\right.\right.\\&\quad\left.+O((t-t_i)^3)\right]dt-\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[\mathrm{x}(t_i)+\dot{\mathrm{x}}(t_i)(t-t_i)\right.\\&\quad\left.\left.+\frac{1}{2}\ddot{\mathrm{x}}(t_i)(t-t_i)^2+O((t-t_i)^3)\right]dt\right\}\\&=\frac{1}{h^2}[h^2\dot{\mathrm{x}}(t_i)+O(h^4)]\\&=\dot{\mathrm{x}}(t_i)+O(h^2)。\end{aligned}\tag{20}$$

对（19）式右端有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{F}}_{i+1,0}+\overline{\mathrm{F}}_{i,0})\\&=\frac{1}{2h}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(\overline{\mathrm{x}}_i,\mathrm{u}(t),t)dt+\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(\overline{\mathrm{x}}_{i-1},\mathrm{u}(t),t)dt\right]\\&=\frac{1}{2h}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[f(\overline{\mathrm{x}}_i,\mathrm{u}(t_i),t_i)+\left.\frac{dt(\overline{\mathrm{x}}_i,\mathrm{u}(t_i),t)}{dt}\right|_{t=t_i}(t-t_i)\right.\right.\end{aligned}$$

$$+O((t-t_i)^2)\Big]dt+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Big[f(\overline{\mathrm{x}}_{i-1},\mathrm{u}(t_i),t_i)+\frac{df(\overline{\mathrm{x}}_{i-1},\mathrm{u}(t),t)}{dt}\Big|_{t=t_i}$$

$$(t-t_i)+O((t-t_i)^2)\Big]dt\Big\}$$

$$=\frac{1}{2h}\Big[h(f(\overline{\mathrm{x}}_i,\mathrm{u}(t_i),t_i)+f(\overline{\mathrm{x}}_{i-1},\mathrm{u}(t_i),t_i))+h^2\Big(\frac{df(\overline{\mathrm{x}}_i,\mathrm{u}(t),t)}{dt}$$

$$-\frac{df(\overline{\mathrm{x}}_{i-1},\mathrm{u}(t),t)}{dt}\Big)\Big|_{t=t_i}+O(h^3)\Big]$$

$$=\frac{1}{2h}\Big[h(f(\overline{\mathrm{x}}_i,\mathrm{u}(t_i),t_i)+f(\overline{\mathrm{x}}_{i-1},\mathrm{u}(t_i),t_i))$$

$$+h^3\frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}\Big(\frac{df(\overline{\mathrm{x}}_i,\mathrm{u}(t),t)}{dt}\Big)\Big|_{\substack{\overline{\mathrm{x}}_i=\overline{\mathrm{x}}_{i-1}\\ t=t_i}}\dot{\mathrm{x}}(t_{i-1})+O(h^3)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}[f(\overline{\mathrm{x}}_i,\mathrm{u}(t_i),t_i)+f(\overline{\mathrm{x}}_{i-1},\mathrm{u}(t_i),t_i)]+O(h^2)$$

$$=f(\overline{\mathrm{x}}_i,\mathrm{u}(t_i),t_i)+\frac{1}{2}h\frac{\partial f}{\partial\overline{x}_{i-1}}\Big|_{\substack{\overline{\mathrm{x}}_{i-1}=\overline{\mathrm{x}}_i\\ t=t_i}}(-\dot{\mathrm{x}}(t_{i-1}))+O(h^2). \tag{21}$$

同样可得

$$\frac{1}{2}[\overline{\mathbf{F}}_{i+1,1}(\overline{\mathrm{x}}_{i+1}-\overline{\mathrm{x}}_i)+\overline{\mathbf{F}}_{i,1}(\overline{\mathrm{x}}_i-\overline{\mathrm{x}}_{i-1})]$$

$$=\frac{1}{2h}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\mathrm{x}=\overline{\mathrm{x}}_i}(\overline{\mathrm{x}}_{i+1}-\overline{\mathrm{x}}_i)dt+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\mathrm{x}=\overline{\mathrm{x}}_i}(\mathrm{x}_i-\overline{\mathrm{x}}_i)dt\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big[h\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{\substack{\mathrm{x}=\overline{\mathrm{x}}_i\\ t=t_i}}\dot{\mathrm{x}}(t_i)+h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{\mathrm{x}=\overline{\mathrm{x}}_{i-1}\\ t=t_i}}\dot{\mathrm{x}}(t_{i-1})\Big]+O(h^2). \tag{22}$$

由（19）～（22）式并利用由（1）式引出的关系式

$$\dot{\mathrm{x}}(t_i)=f(\mathrm{x}(t_i),\mathrm{u}(t_i),t_i),$$

可得 $t=t_i$ 时的截断误差如下：

$$E=\frac{1}{h}(\overline{\mathrm{x}}_{i+1}-\overline{\mathrm{x}}_i)-\frac{1}{2}[\overline{\mathbf{F}}_{i+1,0}+\overline{\mathbf{F}}_{i,0}+\overline{\mathbf{F}}_{i+1,1}(\overline{\mathrm{x}}_{i+1}-\overline{\mathrm{x}}_i)+\overline{\mathbf{F}}_{i,1}(\overline{\mathrm{x}}_i-\overline{\mathrm{x}}_{i-1})]$$

$$= \dot{\mathrm{x}}(t_i) + O(h^2) - \Big[f(\mathrm{x}(t_i), \mathrm{u}(t_i), t_i) - \frac{1}{2}h\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_{i-1}}\Big|_{\substack{\bar{\mathrm{x}}_{i-1}=\bar{\mathrm{x}}_i \\ t=t_i}} \dot{\mathrm{x}}(t_{i-1})$$

$$+ \frac{1}{2}h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{\mathrm{x}=\bar{\mathrm{x}}_i \\ t=t_i}} \dot{\mathrm{x}}(t_i) + \frac{1}{2}h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{\mathrm{x}=\bar{\mathrm{x}}_{i-1} \\ t=t_i}} \dot{\mathrm{x}}(t_{i-1}) + O(h^2) \Big]$$

$$= -\frac{1}{2}h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{\mathrm{x}=\bar{\mathrm{x}}_{i-1} \\ t=t_i}} \dot{\mathrm{x}}(t_{i-1}) + O(h^2)$$

$$= O(h).$$

上式表明，当 $h=T/m\to 0$ 即 $m\to\infty$ 时，$E\to 0$。这说明由（17）等确定的递推算法当 $m\to\infty$ 时收敛，但为一阶精度。

文献[1]指出，算法（2）具有二阶精度。显见，线性化处理的结果导致精度的降低。因此，为保证算法（17）的求解结果具有适当的精度，T 一定时，h 必须取得适当小，或者 m 应取得适当大。

五、算　　例

考虑下述零输入非线性系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2(t) \\ e^{x_1(t)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t\in[0, 0.6].$$

现取 $m=3$，则有 $h=T/m=0.6/3=0.2$。又由

$$f(\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t), t) = \begin{pmatrix} 2x_2(t) \\ e^{x_1(t)} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ e^{x_1} & 0 \end{pmatrix},$$

得

$$\bar{\mathrm{F}}_{i,0} = \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(\bar{\mathrm{x}}_{i-1}, \mathrm{u}(t), t)dt = \begin{pmatrix} 2\bar{x}_{2,i-1} \\ e^{\bar{x}_{1,i-1}} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathrm{F}}_{i,1} = \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\mathrm{x}=\bar{\mathrm{x}}_{i-1}} dt = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ e^{\bar{x}_{1,i-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

$i=1,2,3.$

由上两式及

$$\bar{\mathrm{x}}_1 = \mathrm{x}_0 + 0.1(I_2 - 0.1\bar{\mathrm{F}}_{1,1})^{-1}\bar{\mathrm{F}}_{1,0},$$

$$\bar{\mathrm{x}}_2 = \bar{\mathrm{x}}_1 + 0.1(I_2 - 0.1\bar{\mathrm{F}}_{2,1})^{-1}[\bar{\mathrm{F}}_{2,0} + \bar{\mathrm{F}}_{1,0} + \bar{\mathrm{F}}_{1,1}(\bar{\mathrm{x}}_1 - \mathrm{x}_0)],$$

$$\overline{x}_3=\overline{x}_2+0.1(I_2-0.1\overline{F}_{3,1})^{-1}[\overline{F}_{3,0}+\overline{F}_{2,0}+\overline{F}_{2,1}(\overline{x}_2-\overline{x}_1)],$$

计算得到

$$\overline{x}_1=\begin{pmatrix}0.2245\\1.1124\end{pmatrix},\quad \overline{x}_2=\begin{pmatrix}0.7357\\1.434\end{pmatrix},\quad \overline{x}_3=\begin{pmatrix}1.434\\2.019\end{pmatrix},$$

所以$x(t)$的 BPF 近似解为

$$x(t)\simeq\begin{pmatrix}0.2245\\1.1124\end{pmatrix}\pi_1(t)+\begin{pmatrix}0.7357\\1.434\end{pmatrix}\pi_2(t)+\begin{pmatrix}1.434\\2.019\end{pmatrix}\pi_3(t),t\in(0.06).$$

用算法（2）求解，每步经过5次迭代求得$x(t)$的 BPF 近似解为

$$x(t)\simeq\begin{pmatrix}0.2249\\1.1252\end{pmatrix}\pi_1(t)+\begin{pmatrix}0.73621\\1.4381\end{pmatrix}\pi_2(t)+\begin{pmatrix}1.4382\\2.0689\end{pmatrix}\pi_3(t).$$

两种算法求解结果的比较表明，用改进的递推算法求解的结果是令人满意的。

六、结　语

基于分段线性化，本文在文献[1]的基础上给出了一种用 BPF 求解非线性系统(1)的状态向量 $x(t)$的递推算法。由于所给算法的求解结果是令人满意的，而整个算法可方便地用计算机程序来实现，计算量比文献[1]算法为小，因此看来是有吸引力的。但需注意的是所给算法具有一阶精度，为获得一定的精度，段数m必须取得适当大。另外，算法中有关矩阵的逆必须存在，否则不能使用。

参考文献

[1] 邢继祥等，方块脉冲函数用于非线性系统的分析及最优控制的综合，自动化学报，11，2，（1985），175—183。

[2] Wang Chihsu and Shih Yenping, INT. J. Systems, SCI., 13, 7, (1982), 773—782.

Further Results of Solving Nonlinear Systems Via Block-pulse Functions

Xu Maozeng

(Department of Management, Chongqing Jiaotong Institute)

Abstract

Based on the results given in literature[1], an improved recursive algorithm of solving nonlinear systems via block-pulse functions, which is obtained by utilizing the piecewise linearization, is presented and its convergency analysed. Other possible ways of linearizing are also discussed, which shows the advantages of the linearizing way used in the improved algorithm. In comparision with the algorithm given in the literature, the improved one is more convenient for use on a computer and requires less computations, all of which is shown by an illustrative example with satisfactory results