第5卷 第1期　　控制理论与应用　　Vol.5, No.1
1988年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1988

广义系统的最小实现问题

杨成梧　　谭华林

（华东工学院八系，南京）

摘　要

本文利用传递函数对偶的概念，给出了非真有理分式阵的实现算法和最小实现算法，提出了广义系统的最小实现定理和最小实现之间的强等价定理。

一、引　言

近几年来，广义系统引起了广泛的兴趣和研究[1]，在广义系统的实现问题方面也取得了一定的成果[2,3]。但是已有的讨论都只得到了快、慢子系统实现而非广义系统本身，而且所得结果也仅局限于强既约（即强能控强能观）实现。本文则给出了能导出广义系统本身的一般实现算法，并研究了最小实现问题。

二、实现算法

考虑连续的线性时不变广义系统

$$E\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx, \tag{1}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$、$u\in\mathbf{R}^p$、$y\in\mathbf{R}^m$ 是状态、输入和输出，E 是奇异方阵，A, B, C 是具有适当阶的矩阵。设系统（1）是正则的，即存在使 $\det(\mu E+A)\neq 0$ 的数 $\mu\in\mathbf{C}$，称 μ 为正则数。

对系统（1）作 Pandolfi 变换[4]：

$$z(t)=x(t)\exp(\mu t), \tag{2}$$

其中 μ 选为正则数，可得

$$\overline{E}\dot{z}=z+\overline{B}w,\quad \gamma=\overline{C}z \tag{3}$$

及

$$\dot{z}=\overline{E}z+\overline{B}w,\quad \gamma=\overline{C}z, \tag{4}$$

本文于1987年5月12日收到，1987年10月24日收到修改稿。

这里$\overline{E}=(\mu E+A)^{-1}E$，$\overline{B}=(\mu E+A)^{-1}B$，$\overline{C}=C$，$w=u\exp(\mu t)$，$\gamma=y\exp(\mu t)$。称系统（3）与（4）互为传递函数对偶。依次记系统（1）、（3）、（4）的传递函数阵为$H(s)$、$\overline{H}(s)$、$\overline{H}_D(s)$，则易知

引理 1 $H(s)=\overline{H}(s+\mu)$，$\overline{H}(s)=-\frac{1}{s}\overline{H}_D\left(\frac{1}{s}\right)$。 （5）

算法 1（实现算法）。

给定有理分式阵$G(s)=\frac{1}{g(s)}(g_{ij}(s))_{p\times q}$

$$g_{ij}(s)=\alpha_n^{ij}s^n+\alpha_{n-1}^{ij}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1^{ij}s+\alpha_0^{ij},$$
$$g(s)=\beta_m s^m+\beta_{m-1}s^{m-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0. \tag{6}$$

n，m为非负整数且$n>m$。矩阵$N=\left(\alpha_n^{ij}\right)_{p\times q}\neq 0$。

第一步：若$g(0)=\beta_0\neq 0$，这时$\overline{G}_D(s)=-\frac{1}{s}G\left(\frac{1}{s}\right)$严格真，用正常系统的任一实现算法可将$\overline{G}_D(s)$实现为形如

$$\begin{aligned}\dot{x}&=A_1x+B_1u,\\ y&=C_1x\end{aligned} \tag{7}$$

的系统，再由引理1即知$G(s)$的实现是

$$\begin{aligned}A_1\dot{x}&=x+Bu,\\ y&=C_1x.\end{aligned} \tag{8}$$

其中A_1的奇异性由$|sI-A_1|=s^{n-m+1}(\beta_0s^m+\cdots+\beta_m)$可知。

第二步：若$g(0)=0$，选正则数μ使$g(\mu)\neq 0$，易知$G_\mu(s)\triangleq G(s+\mu)$求满足（6）的条件且相应的$g_\mu(0)=g(\mu)\neq 0$。由第一步可将$G_\mu(s)$实现为广义系统

$$\begin{aligned}A(\mu)\dot{x}&=x+B(\mu)u,\\ y&=C(\mu)x,\end{aligned} \tag{9}$$

再由引理1得$G(s)$的实现为

$$\begin{aligned}A(\mu)\dot{x}&=(\mu A(\mu)+I)x+B(\mu)u,\\ y&=C(\mu)x.\end{aligned} \tag{10}$$

三、最小实现定理

Verghese等[2]指出，对系统（1）的系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} sE-A & -B \\ \hline C & 0\end{array}\right) \tag{11}$$

可作类似正常系统 Kalman 形式的分解：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} sE_{\bar{o}c}-A_{\bar{o}c} & * & * & * & -B_{\bar{o}c} \\ & sE_{\bar{o}\bar{c}}-A_{\bar{o}\bar{c}} & 0 & * & 0 \\ & & sE_{oc}-A_{oc} & * & -B_{oc} \\ & & & sE_{o\bar{c}}-A_{o\bar{c}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{oc} & C_{o\bar{c}} & 0 \end{array}\right). \tag{12}$$

这里o、$\bar{o}$、c、$\bar{c}$分别表示强能观、不能观、强能控、不能控，而且若系统（1）是某$H(s)$的实现，则其强能控强能观子系统

$$\begin{aligned} E_{oc}\dot{x} &= A_{oc}x + B_{oc}u, \\ y &= C_{oc}x \end{aligned} \tag{13}$$

也是$H(s)$的一个实现。Verghese 等人称（13）为$H(s)$的“强既约”实现。

正常系统的既约实现与最小实现同义，而对广义系统，下面的例子说明强既约不是最小实现的充分条件。

例　广义系统为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}u, \tag{14}$$

$$y = [\,3\ \ 1\ \ 1\ \ 1\,]x,$$

其传递函数为$H(s) = -s^2 - s - 2$。再考察系统

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{z} = z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}u_1, \tag{15}$$

$$y_1 = [\,1\ \ 1\ \ 1\,]z,$$

它的传递函数也为$H(s)$。用文[5]的判据易证，系统（14）和（15）都是强既约的。

建立广义系统最小实现定理需要如下引理。

引理 2[2]　两个强能控强能观广义系统S_1和S_2强等价的充要条件是它们有相同的传递函数阵。

定理 1　非真有理分式阵$H(s)$的实现是最小实现的充要条件是：

1°　它是强能控强能观的（强既约的）；

2°　它不能再进行平凡压缩变换。

证　必要性。若由（E, A, B, C）表示的广义系统是$H(s)$的最小实现，1°显然成立。若不然，其强能控强能观子系统也是$H(s)$的实现，维数更小，矛盾。若2°不成立，

即（E, A, B, C）经过平凡压缩变换变成维数更低的系统（E_1, A_1, B_1, C_1）。由于这两个系统强等价，根据引理2即知它们有相同的传递函数阵，从而（E_1, A_1, B_1, C_1）也是$H(s)$的实现，这与（E, A, B, C）是最小实现矛盾。

充分性。设（E, A, B, C）是$H(s)$的一个实现，满足1°和2°，但不是最小实现。再设（E_1, A_1, B_1, C_1）是$H(s)$的最小实现。由引理2，它们是强等价的，从而（E_1, A_1, B_1, C_1）能由（E, A, B, C）经过一系列允许变换得到。但允许变换中只有平凡压缩变换是降维的，故（E, A, B, C）必能进行平凡压缩变换，这与它满足2°矛盾。

例中系统（14）不是最小实现的原因正是它不满足2°，事实上，令

$$z=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}x, \tag{16}$$

则系统（14）变成

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\dot{z}=z+\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}u, \tag{17}$$

$$y=[1\ 1\ 1\ 0]z.$$

系统（17）可进行平凡压缩变换。

定理 2　非真有理分式阵的两个最小实现必定是强等价的。

证　是定理1和引理2的直接推论。

四、最小实现算法

先证明两个结论，它们与前面结果一起保证了本节算法的正确性。

定理 3　系统（1）与系统（3）具有相同的强能控强能观性，即Pandolfi变换保持系统强能控强能观性不变。

证　只证强能控的情形。记$EQ=(E_1,\ 0)$，Q为满秩方阵，E_1列满秩；再记$(sE-A,\ B)\begin{pmatrix}Q&0\\0&I\end{pmatrix}=(sE_1-A_1,-A_2,B)$，则系统（1）强能控的充要条件为[5]

$$\mathrm{rank}(sE-A,B)=n,\qquad \forall s\in\mathbf{C},\ s\text{有限}$$

且
$$\mathrm{rank}(E_1,-A_2,B)=n.$$

对系统（3），由于$(s\overline{E}-I,\ \overline{B})=(\mu E+A)^{-1}((s-\mu)E-A,B)$知$\mathrm{rank}(s\overline{E}-I,\ \overline{B})=n$，$\forall s\in\mathbf{C}$，$s$有限

$$\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(sE-A,\ B)=n,\quad \forall s\in \mathbf{C},\ s\text{有限}$$

而　$$(s\overline{E}-I,\ \overline{B})\begin{bmatrix} Q & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}=(\mu E+A)^{-1}[(s-\mu)E_1-A_1,\ \ -A_2,\ B]$$

$$\triangleq((s-\mu)\overline{E}_1-\overline{A}_1,\ \ -\overline{A}_2,\ \overline{B}),$$

故　$$\operatorname{rank}(\overline{E}_1,-\overline{A}_2,\overline{B})=\operatorname{rank}\{(\mu E+A)^{-1}(E_1,-A_2,B)\}$$
$$=\operatorname{rank}(E_1,-A_2,B).$$

定理 4　正常系统（4）能控，则广义系统（3）强能控。对能观性也有此结论。

证　若系统（4）能控，则有

$$\operatorname{rank}(sI-\overline{E},\overline{B})=n,\qquad \forall s\in\mathbf{C},\ s\text{有限。}\tag{18}$$

当 $s\neq 0$ 时，由（18）式知

$$n=\operatorname{rank}\left(\frac{1}{s}I-\overline{E},\overline{B}\right)=\operatorname{rank}\left\{(s\overline{E}-I,\overline{B})\begin{bmatrix}-\frac{1}{s}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\right\}$$
$$=\operatorname{rank}(s\overline{E}-I,\overline{B}).$$

而显然　$n=\operatorname{rank}(-I,\overline{B})=\operatorname{rank}(0\cdot\overline{E}-I,\overline{B}).$

所以　$\operatorname{rank}(s\overline{E}-I,\ \overline{B})=n,\qquad \forall s\in\mathbf{C},\ s$有限

当 $s=0$ 时，（18）式即$\operatorname{rank}(\overline{E},\overline{B})=n$,故有

$$n=\operatorname{rank}(\overline{E},\ \overline{B})=\operatorname{rank}\left\{(\overline{E},\ \overline{B})\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\right\}$$
$$=\operatorname{rank}(\overline{E}_1,0,\overline{B})=\operatorname{rank}(\overline{E}_1,\overline{B})$$
$$=\operatorname{rank}(\overline{E}_1,\ -\overline{A}_2,\ \overline{B}).$$

算法 2（最小实现算法）。

第一步：将 $H(s)$的传递函数对偶$\overline{H}_D(s)=-\frac{1}{s}H\left(\frac{1}{s}\right)$实现为正常系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ex+Bu,\\ y&=Cx.\end{aligned}\tag{19}$$

第二步：利用 Kalman 分解求系统（19）的能控能观子系统，由定理4进而得$H(s)$的强既约实现

$$\begin{aligned}E_{oc}\dot{x}_1&=x_1+B_{oc}u_1,\\ y_1&=C_{oc}x_1.\end{aligned}\tag{20}$$

第三步：考察系统（20）能否进行平凡压缩变换，最后得不能再进行的系统就是 $H(s)$的最小实现．

五、结　论

本文的讨论得到了比〔2〕、〔3〕更一般的结果。文中定理1多了条件2°是因为广义系统有非动态变量存在的缘故．由于正常系统显然不存在平凡压缩变换，定理1与正常系统最小实现定理相容。另外易见，正常系统任一实现算法都可作为本文实现算法和最小实现算法的一部分．本文的结果表明有必要深入研究非动态变量．

参 考 文 献

〔1〕 王朝珠、戴立意，广义动态系统，控制理论与应用，3，1，（1986），1—12

〔2〕 Verghese, G. C., B. C. Levy and T. Kailth, A Generalized State-space for Singular Systems, IEEE Trans., AC-26, 4, (1981), 811-831.

〔3〕 Vardulakis, A. I. G., D. N. J. Limebeer and N. Karcanias, Structure and Smith-MacMillan Form of a Rational Matrix at Infinity, Int. J. Control, 35, 4, (1982), 701-725.

〔4〕 Pandolfi, L., Controllability and Stabilization for Linear Systems of Algebraic and Differential Equations, JOTA, 30, 4, (1980), 601-620.

〔5〕 严拱天，广义动力系统的可控性与可观性，控制理论与应用，2，2，（1985），33—44．

The Minimal Realization Prodlem of Singular Systems

Yang Chengwu, Tan Hualin

(Ballistic Research Laboratory of China
East China Institute of Technology, Nanjing)

Abstract

In this paper, two theorems about the minimal realizations of singular system are developed, and two algorithms which respectly produce the realization and minimal realization of improper rational matrices are given.