第5卷 第1期
1988年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.5, No.1
March, 1988

离散型系统的不完全状态最优反馈控制

陈有根　　王汝渠

（复旦大学数学系，上海）

摘　　要

本文运用一种新的泛函指标，把离散型线性系统的不完全状态最优反馈调节器问题的求解等价地转化为一个数学规划问题，并对解的存在条件进行了讨论。

一、引　　言

设 $x\in R^{n\times 1}$，$u\in K^{r\times 1}$，$A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times r}$，线性系统

$$x_{k+1}=Ax_k+Bu_k, \tag{1}$$

使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$，且目标泛函

$$\widetilde{I}(u,x_0)=\sum_{k=0}^{\infty}(u_k^TRu_k+x_k^TQx_k) \tag{2}$$

取最小值的最优控制是状态的线性反馈 $u_k=Hx_k$，这里 $R\in K^{r\times r}$，$Q\in R^{n\times n}$，$H\in R^{r\times n}$，且 $R>0$，$Q\geq 0$。这时要求

$$|\sigma(A+BH)|<1。 \tag{3}$$

如果（A，B）可控，x 的各分量完全可测，则

$$H=-(R+B^TP^*B)^{-1}B^TP^*A$$

给出了问题（1）、（2）、（3）的最优解[1]，其中 P^* 是 Riccati 方程

$$Q+A^TPA-P-A^TPB(R+B^TPB)^{-1}B^TPA=0 \tag{4}$$

的正定对称解。这时，目标函数 $\widetilde{I}(u,x_0)=x_0^TP^*x_0$。

但是，当 x 的某些分量 $x^{n_1},\cdots x^{n_k}$，不可观测，为了使反馈控制 $u_k=Hx_k$ 可行，H 中相应的第 n_1，…，n_k 列均应为零向量，记这种 H 的全体为 $\mathbf{H}$。则此时的目标泛函为

$$I(u,x_0)=x_0^TP(H)x_0, \tag{5}$$

其中，$P(H)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}[(A+BH)^T]^k(Q+H^TRH)(A+BH)^k$。　　（6）

为了衡量控制 $u_k=Hx_k$ 的优劣，参照〔2〕的思想，引进

本文于1985年10月17月收到。1987年2月17日收到修改稿。

$$J(H,x_0)=\frac{x_0^TP(H)x_0}{x_0^TP^*x_0},\tag{7}$$

在闭球面$\|x_0\|=1$上，$J(H,x_0)$是x_0的连续函数，且$J(H,x_0)\geq 1$。

定义衡量指标

$$J^*(H)=\max_{x_0\neq 0} J(H,x_0),\tag{8}$$

它是不论动态x_0取何值，反馈控制与最优反馈控制相比较的指标。我们用$J^*(H)$而不是〔3〕中所用的类似于$I(u,x_0)$来衡量状态不完全反馈控制的优劣，原因在于我们无法事先知道初态x_0的随机分布，下面着手解决

$$\min_{H\in \mathbf{H}} J^*(H).\tag{9}$$

二、最优线性反馈

引理 1[4]　任何半正定阵$S\in R^{n\times n}$均可表示为以下形式

$$S=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_n\alpha_n^T.$$

若另成立$\mathrm{rank}(S)<n$，则S可表示为

$$S=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}^T,$$

其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in R^{n\times 1}$。

引理 2　对于(3)、(4)、(6)中所定义的$H,P^*,P(H)$，必存在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}\in R^{n\times 1}$，成立

$$P(H)-J^*(H)P^*=-\alpha_1\alpha_1^T-\cdots-\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}^T.\tag{10}$$

反之，若有$\tilde{J}$及$\tilde{\alpha}_1,\ \tilde{\alpha}_2,\ \cdots,\ \tilde{\alpha}_{n-1}\in R^{n\times 1}$，满足

$$P(H)-\tilde{J}P^*=-\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_1^T-\cdots-\tilde{\alpha}_{n-1}\tilde{\alpha}_{n-1}^T,\tag{11}$$

则

$$\tilde{J}=J^*(H).$$

证　由(7)、(8)得

$$x_0^T(P(H)-J^*(H)P^*)x_0\leq 0,\qquad \forall x_0\in R^{n\times 1}$$

因此，$P(H)-J^*(H)P^*$为一个负半定阵。

另由$J^*(H)$的定义，则必存在一个$x_0^*\neq 0$，使得

$$x_0^{*T}(P(H)-J^*(H)P^*)x_0^*=0.$$

所以，$P(H)-J^*(H)P^*$不满秩。由引理1，(10)成立。

反之，若存在$\tilde{J}$，$\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\alpha}_2$，…，$\tilde{\alpha}_{n-1}$，满足（11），由于$\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_1^T+\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_2^T+\cdots+\tilde{\alpha}_{n-1}\tilde{\alpha}_{n-1}^T$不满秩，必存在$x_0\neq 0$，使

$$x_0^T(P(H)-\tilde{J}P^*)x_0=-x_0^T(\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_1^T+\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_2^T+\cdots+\tilde{\alpha}_{n-1}\tilde{\alpha}_{n-1}^T)x_0=0,$$

由此可得

$$\tilde{J}=\frac{x_0^TP(H)x_0}{x_0^TP^*x_0}=J(H,x_0)\leq J^*(H)。$$

又由（10），对于$J^*(H)$，必存在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$，成立

$$P(H)-J^*(H)P^*=-\alpha_1\alpha_1^T-\alpha_2\alpha_2^T-\cdots-\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}^T, \tag{12}$$

（11）、（12）两式相减，得

$$(J^*(H)-\tilde{J})P^*=(\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}^T)-(\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_1^T+\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_2^T+\cdots+\tilde{\alpha}_{n-1}\tilde{\alpha}_{n-1}^T)。$$

若$\tilde{J}\neq J^*(H)$，即$\tilde{J}<J^*(H)$，上式右边为两个不满秩的半正定阵之差，与左边的正定阵矛盾。因此，$\tilde{J}=J^*(H)$。

设状态分量x^{k_1}，…，x^{k_l}可观测。取$y_i=x^{k_i}$，$i=1,2,\cdots l$。把反馈控制$u_k=Hx_k$看作输出y的反馈控制，其中

$y=(y_1,y_2,\cdots,y_l)^T=(x^{k_1},x^{k_2},\cdots,x^{k_l})^T$。定义$C\in R^{l\times n}$，使得

$$Cx=(x^{k_1},x^{k_2},\cdots,x^{k_l})^T。$$

引理 3[5] 设系统（1）完全可控，则容许控制矩阵集合$\mathbf{H}$非空的充分必要条件是：（A，C）可检测。

对于反馈控制$u_k=Hx_k$，$H\in\mathbf{H}$，沿系统状态的轨迹点x_0，…，x_l，…，x_k，…，成立

$$I(u,x_l)-I(u,x_{l-1})=-x_{l-1}^T(Q+H^TRH)x_{l-1}。$$

又根据$I(u,x_0)$定义，$I(u,x_l)=x_l^TP(H)x_l$，$I(u,x_{l-1})=x_{l-1}^TP(H)x_{l-1}$，并注意到$x_l=(A+BH)x_{l-1}$，我们可得

$$x_{l-1}^T(A+BH)^TP(H)(A+BH)x_{l-1}-x_{l-1}^TP(H)x_{l-1}=-x_{l-1}^T(Q+H^TRH)x_{l-1},$$

由于x_0可任意选取，于是由上式可得

$$(A+BH)^TP(H)(A+BH)-P(H)=-Q-H^TRH, \tag{13}$$

进一步，把（10）代入（13），并用S记$\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}^T$，得$-(Q+H^TRH)$

$$=J^*(H)(A+BH)^TP^*(A+BH)-(A+BH)^TS(A+BH)-J^*(H)P^*+S. \tag{14}$$

由此可得如下结果：

定理 1　设系统 $x_{k+1}=Ax_k+Bu_k$ 完全可达，相应于反馈控制 $u_k=Hx_k$ 的目标泛函为

$$J^*(H)=\max_{x_0\neq 0}\frac{x_0^TP(H)x_0}{x_0^TP^*x_0},$$

其中，P^*、$P(H)$ 由（4）、（6）所定义，则求解不完全状态最优反馈矩阵 H 与求解以下数学规划问题等价：

$$\min_{H\in \mathbf{H}} J$$

$$S.t.\begin{cases} -(Q+H^TRH)=J(A+BH)^TP(A+BH)-JP+\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}^T \\ \qquad -(A+BH)^T(\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}^T)(A+BH), \\ Q+A^TPA-P-A^TPB(R+B^TPB)^{-1}B^TPA=0. \end{cases} \tag{15}$$

该问题有解当且仅当（A，C）可检测，其中 C 的定义同引理3。

这里，把（A，B）完全可控的条件加强到完全可达是为了保证 $A+BH$ 的极点可任意配置，从而保证了 $A+BH$ 的特征根可以在单位圆内。这时，给定 H 后，（13）中解 $P(H)$ 是唯一确定的，从而（14）中 $J^*(H)$ 及 S 均可唯一确定。当 $J^*(H)=1$ 时，用此方法求得的最优解与一般意义下最优解是一致的。

三、例　　子

设系统方程为

$$x_{k+1}=y_k,\qquad y_{k+1}=-y_k+u_k,$$

目标泛函

$$I(u)=\sum_{k=0}^{\infty}(u_k^2+4x_k^2+9y_k^2),$$

其中，y_k 不可测，反馈控制是 $u_k=hx_k$。

此例符合定理中所要求的可达、可检测条件，Riccati 方程（4）的正定对称解是 $P=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 13.93\end{pmatrix}$，$A+BH$ 的特征根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4h}}{2}$，$\lambda_{1,2}$ 均落在单位圆内的充分必要条件为 $-1<h<0$。

设 $S=\alpha\alpha^T$，$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2)^T$，为了求得最优控制参数 h，只须考虑以下数学规划问题：

$$\min J$$

约束条件：$-(4+h^2)=J(13.93h^2-4)+\alpha_1^2-h^2\alpha_2^2,$

$$0=-13.93hJ+\alpha_1\alpha_2-h\alpha_1\alpha_2+h\alpha_2^2,$$

$$-9=4J+2\alpha_1\alpha_2-\alpha_1^2,$$

$$-1<h<0.$$

我们结合惩罚法和坐标下降法[6]，把各迭代点（J,h,α_1,α_2）在约束方程两边产生的差值的平方和乘上一个惩罚因子后加到目标函数上。设

$$H_1=4+h^2+J(13.93h^2-4)+\alpha_1^2-h^2\alpha_2^2,$$

$$H_2=-13.93Jh+\alpha_1\alpha_2-h\alpha_1\alpha_2+h\alpha_2^2,$$

$$H_3=4J+2\alpha_1\alpha_2-\alpha_1^2+9,$$

$$C_1=\max\{|H_1|,|H_2|,|H_3|\},$$

$$F=J+10^{15}(H_1^2+H_2^2+H_3^2).$$

在 h 的许可范围内对 F 求极小，由于因子 10^{15} 的控制，经过数次迭代，$H_1^2+H_2^2+H_3^2$ 接近于零，对 F 求极值也相当于对 J 求极小。最后得到如下结果：

$$J=3.36763,\quad h=-0.25703,\quad \alpha_1=-2.62432,\quad \alpha_2=2.96903.$$

这时，方程误差指标 $C_1<10^{-4}$，可以认为这组数值是使目标泛函 J 达到极小的且符合约束条件的解

因此，原问题的最优反馈控制为

$$u_k=-0.25703x_k.$$

参考文献

〔1〕 Anderson, B. D. O., Moore, J. B., Linear Optimal Control, Pretice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J.,, (1971).

〔2〕 Rekasius, Z. U., Optimal Linear Regulators with Incomplete State Feedback, IEEE Trans. Aut. Contr., June (1967), 296-299.

〔3〕 Levine, W. S., John, T. L., and Athans, M., Optimal Limited State Uariable Peedback Controllers for Linear Systems, IEEE Trans. Aut. Contr., Dec. AC-16, (1971), 785-793.

〔4〕 屠伯埙等编，高等代数，上海科技出版社，（1986）。

〔5〕 Kwon, W, H,. A modified Quandratic Cost Problem and Feedback Stabiliz-ation of a Linear System, IEEE Trans. Contr., 22, 5, (1977), 838-842.

[6] Luenberger, D. G., Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Reading, Mass., Addision-Wesley, (1973).

Optimal Control of Stite Feedback of Discrete-time Linear Systems

Chen Yougen, Wang Ruqu
(Department of Mathematics, Fudan University, Shanghai)

Abstract

This paper presents a method for transforming the problem of optimal control for a discrete-time system with incomplete state feedback into a problem of mathematical programming. The existence of the solution is also discussed.

==