第5卷 第1期
1988年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.5, No.1
March, 1988

奇异系统的一个实现方法

赵克友

（青岛大学自控系）

摘　要

对于线性时不变奇异系统，给出传递矩阵构造它的最小有限维实现。所提算法的关键是将传递矩阵变成正常的，因而可以享用对正常系统已有实现结果的一些长处。

一、问题的叙述

由系统的外部描述找其内部描述称为实现。关于正常线性系统的实现已有许多结果，如文〔1,2〕。有关奇异线性系统（又称广义系统）的实现，1985年文〔3〕给了一个方法——用到繁琐的Markov参数，又有一个难于验证的前提：有限维实现是存在的，换言之，Hankel矩阵的秩是有限的。本文将给出的方法，一无前提，二可借用熟知的正常系统的实现结果，故用很少计算即可得到最小实现。

所谓奇异系统是指由下面模型描述的系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \qquad (1a)$$

$$y = Cx, \qquad (1b)$$

其中，$x\in R^n$，$u\in R^m$，$y\in R^p$，E，A，B 及 C 都是相应维数的常数矩阵，方阵 E 通常是奇异的。

系统（1）是可解的，如果对任何充分可微的 $u(t)$ 及与它相应的任何给定的可允许的初始状态都有唯一解存在的话。文〔4,5〕说系统（1）可解当且仅当矩阵束 $\lambda E+A$ 是正则的，即除去有限个复数 λ 外 $\det(\lambda E+A)\neq 0$。

如同正常系统，对于可解的系统（1）在零初始条件下其输入输出关系由下面的传递矩阵

$$G(s) = C(sE-A)^{-1}B \qquad (2)$$

给出，(E, A, B, C) 称为传递矩阵 $\mathbf{G}(s)$ 的一个实现。称 $\mathbf{G}(s)$ 的一个实现 (E, A, B, C) 是最小的，如果 A 连同 E 有尽可能小的维数。需说明的是，就连最小实现也是不唯一的，这是由于对任意的非奇异常数矩阵 Q 与 T，实现（E，A，B，C）与 (QET, QAT, QB, CT) 都对应同一传递矩阵。

本文欲解决下述问题：

对于任给的 $p\times m$ 有理（不必严格真）矩阵 $\mathbf{G}(s)$，求其最小实现。

本文于1987年4月6日收到。1987年10月29日收到修改稿。

二、预 备 知 识

本段给出的几个命题是本文所叙方法的基础。

命题 1 若可解系统 (E, A, B, C) 的传递矩阵 $G(s)=C(sE-A)^{-1}B$，则矩阵 $-\frac{1}{s}G\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)$ 关于 s 是严格真的（即每一元是严格真的有理分式）；从而它有一个正常的实现 $(\hat{E}, \hat{B}, \hat{C})=(Q^{-1}ET^{-1}, Q^{-1}B, CT^{-1})$，即 $-\frac{1}{s}G\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)=\hat{C}(sI-\hat{E})^{-1}\hat{B}$，其中 Q、T 为任意满足 $\lambda E+A=QT$ 的 n 阶非奇异方阵，而 λ 是任何能使 $\det(\lambda E+A)\neq 0$ 的实数。

证 由于 $G(s)=C((s+\lambda)E-(\lambda E+A))^{-1}B=C((s+\lambda)E-QT)^{-1}B$

$$=CT^{-1}((s+\lambda)Q^{-1}ET^{-1}-I)^{-1}Q^{-1}B=-\frac{1}{s+\lambda}CT^{-1}\left(\frac{1}{s+\lambda}I-Q^{-1}ET^{-1}\right)^{-1}Q^{-1}B,$$

上式中用 $\hat{E}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{s}$ 分别代替 $Q^{-1}ET^{-1}$, $Q^{-1}B$, CT^{-1}, $\frac{1}{s+\lambda}$，且用 $-\frac{1}{\hat{s}}$ 乘等式两边，即得 $\hat{C}(\hat{s}I-\hat{E})^{-1}\hat{B}=-\frac{1}{\hat{s}}G\left(\frac{1}{\hat{s}}-\lambda\right)$。上式正表达了我们所希望的结论。

命题 2 给出任意一个 $p\times m$ 传递矩阵 $G(s)$，设其元素为 $b_{ij}(s)/a_{ij}(s)$，$i=1,2,\cdots,p$，$j=1,2,\cdots,m$，且 $a_{ij}(s)$ 与 $b_{ij}(s)$ 都是互质多项式；对于任何满足下面关系的 λ

$$\lambda\in\{\mu\in R;\ a_{ij}(-\mu)\neq 0,\ i=1,2,\cdots,p,\ j=1,2,\cdots,m\}, \tag{3}$$

导出矩阵 $-\frac{1}{s}G\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)$ 是关于 s 的严格真传递矩阵。

证 设 $a_{ij}(s)=a_0^{ij}s^{k_{ij}}+a_1^{ij}s^{k_{ij}-1}+\cdots+a_{k_{ij}-1}^{ij}s+a_{k_{ij}}, a_0^{ij}\neq 0$,

$b_{ij}(s)=b_0^{ij}s^{h_{ij}}+b_1^{ij}s^{h_{ij}-1}+\cdots+b_{h_{ij}-1}^{ij}s+b_{h_{ij}}, b_0^{ij}\neq 0$,

则矩阵 $-\frac{1}{s}G\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)$ 的第 ij 元可表示为

$$-\frac{1}{s}\frac{b_{ij}\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)}{a_{ij}\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)}=-\frac{s^{k_{ij}}}{s^{h_{ij}+1}}\frac{\hat{b}_0^{ij}s^{h_{ij}}+\hat{b}_1^{ij}s^{h_{ij}-1}+\cdots+\hat{b}_{h_{ij}}^{ij}}{\hat{a}_0^{ij}s^{k_{ij}}+\hat{a}_1^{ij}s^{k_{ij}-1}+\cdots+\hat{a}_{k_{ij}}^{ij}}, \tag{4}$$

其中 $\hat{a}_r^{ij} = \sum_{t=0}^{k_{ij}-r} a_t^{ij} C_{k_{ij}-t}^{r} (-\lambda)^{k_{ij}-r-t}$, $r=0,1,2,\cdots,k_{ij}$,

$$\hat{b}_s^{ij} = \sum_{t=0}^{h_{ij}-s} b_t^{ij} C_{h_{ij}-t}^{s} (-\lambda)^{h_{ij}-s-t}, \quad s=0,1,2,\cdots,h_{ij}.$$

注意 $\hat{a}_0^{ij} = a_{ij}(-\lambda)$，及（3）与（4），立即可确认矩阵 $-\frac{1}{s}\mathbf{G}\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)$ 的每一元素是真有理的。

命题 3 设传递矩阵 $\mathbf{G}(s)$ 的元素为 $b_{ij}(s)/a_{ij}(s)$，$i=1,2,\cdots,p$，$j=1,2,\cdots,m$ 且 $a_{ij}(s)$ 与 $b_{ij}(s)$ 都是互质多项式，若它的导出矩阵 $-\frac{1}{s}\mathbf{G}\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)$ 有一个最小实现 $(\hat{E},\ \hat{B},\ \hat{C})$ 即 $-\frac{1}{s}\mathbf{G}\left(\frac{1}{s}-\lambda\right) = \hat{C}(sI-\hat{E})^{-1}\hat{B}$，其中 λ 满足(3)，则 $(E,A,B,C)=(Q\hat{E}T,\ Q(I-\lambda\hat{E})T,\ Q\hat{B},\ \hat{C}T)$ 就是 $\mathbf{G}(s)$ 的一个最小实现，这里 Q 与 T 可为任意非奇异矩阵。

证 由命题 1 中 $(\hat{E},\ \hat{B},\ \hat{C}) = (Q^{-1}ET^{-1},\ Q^{-1}B,\ CT^{-1})$ 及 $\lambda E + A = QT$ 可立即解得

$$E = Q\hat{E}T,\quad A = Q(I-\lambda\hat{E})T,\quad B = Q\hat{B},\quad C = \hat{C}T.$$

很易确认 $(E,\ A,\ B,\ C)$ 是 $\mathbf{G}(s)$ 的一个实现。若 $\mathbf{G}(s)$ 另有一个维数比 $(E,\ A,\ B,\ C)$ 更小的实现 $(\tilde{E},\ \tilde{A},\ \tilde{B},\ \tilde{C})$，由命题1，将有 $-\frac{1}{s}\mathbf{G}\left(\frac{1}{s}-\lambda\right) = \tilde{C}\tilde{T}^{-1}(sI - \tilde{Q}^{-1}\tilde{E}\tilde{T}^{-1})^{-1}\tilde{Q}^{-1}\tilde{E}$，其中 $\tilde{Q}$，$\tilde{T}$ 及 λ 满足

$$\lambda\tilde{E} + \tilde{A} = \tilde{Q}\tilde{T},\quad \det(\lambda\tilde{E}+\tilde{A}) \neq 0. \qquad (5)$$

由于 $\mathbf{G}(-\lambda) = \tilde{C}(-\lambda\tilde{E}-\tilde{A})\tilde{B} = -\tilde{C}(\lambda\tilde{E}+\tilde{A})^{-1}\tilde{B}$，易证满足（5）的 λ 属于集合 $\{\mu\in\mathbf{R}:\ a_{ij}(-\mu)\neq 0,\ i=1,2,\cdots,p,\ j=1,2,\cdots,m\}$。这样一来 $-\frac{1}{s}\mathbf{G}\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)$ 将有一个比 $(\hat{E},\ \hat{B},\ \hat{C})$，维数更小的实现 $(\tilde{Q}^{-1}\tilde{E}\tilde{T}^{-1},\ \tilde{Q}^{-1}\tilde{B},\ \tilde{C}\tilde{T}^{-1})$，出现的矛盾证得最小性。

三、实 现 算 法

设 $\mathbf{G}(s)$ 是任意给定的 $p\times m$ 有理传递矩阵，其 ij 元为 $b_{ij}(s)/a_{ij}(s)$，且 $b_{ij}(s)$ 与 $a_{ij}(s)$ 是互质的。

第一步：选一个实数 $\lambda\in\{\mu\in\mathbf{R}:\ a_{ij}(-\mu)\neq 0,\ i=1,2,\cdots,p\quad j=1,2\cdots,m\}$。

第二步：整理矩阵 $-\frac{1}{s}\mathbf{G}\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)$，如前所述，它已是真有理的了。

第三步：按正常情况求 $-\frac{1}{s}\mathbf{G}\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)$ 的最小实现($\hat{E}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$)。

第四步：则 $(E, A, B, C)=(Q\hat{E}T,\ Q(I-\lambda\hat{E})T,\ Q\hat{B}, \hat{C}T)$ 便是 $\mathbf{G}(s)$ 的一个最小实现，其中 Q 与 T 是具有相应维数的任意非奇异矩阵。特别，若令 $Q=T=I$，则最小实现为 $(E, A, B, C)=(\hat{E},\ I-\lambda\hat{E},\ \hat{B},\ \hat{C})$。

因篇幅所限，算例略去。

参考文献

〔1〕 Mayne, D. Q., Computational Procedure for the Minimal Realization of Transfer Function Matrices, Proc. IEE, 115, 9, (1968), 1363-1368.

〔2〕 Silverman, L. M., Realization of Linear Dynamical Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-16, (1971), 554-567.

〔3〕 Christodoulou, M. A., and Mertzios, B. G., Realization of Singular Systems via Markov Parameters, Int. J. Control, 42, 6, (1985), 1433-1441.

〔4〕 Campbell, S. L., Singular Systems of Differential Equations, Pitman Press, London, (1980).

〔5〕 Yip, E., and Sincovec, R. F., Solvability, Controllability, and Observability of Continuous Descriptor Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-26, 3, (1981), 702-707.

A Realization Method of Singular Systems

Zhao Keyou

(Department of Automatic Control, Qingdao University)

Abstract

An algorithm is developed for the construction of minimal finite-dimensional realization of linear time-invariant singular systems when the transfer matrix is given. The key of the presented algorithm is to turn any transfer matrix into regular one, so it enjoys the advantages of the known realization results for regular systemse.